

С.Н. Исаков

Введение
в нефинитную
логику

Екатеринбург 2019

УДК 164, 512

Исаков Сергей Николаевич

Введение в нефинитную логику. Екатеринбург, 2019. 208с.

Рассматриваются дополнительные возможности, связанные с расширением классической финитной логики, предполагающей получение окончательного результата за конечное число шагов, до нефинитной, допускающей бесконечные процедуры, имеющие предел. Центральное место занимает построение разрешающей процедуры средствами нефинитной логики для всей математики континуума. Все рассмотренные разрешающие процедуры и доказательства неразрешимости отдельных теорий базируются на специальном логическом формализме в рамках классической финитной логики, эффективность которого обусловлена его компактностью: он содержит только одну аксиому и 4 правила вывода.

Оглавление

Введение	5
Глава 1 Замкнутое исчисление предикатов	21
§1. Определение формализма I^Z	21
§2. Доопределение логических операций	26
§3. Расширение правил вывода	31
§4. Правило эквивалентной замены	35
§5. Нормальная форма	43
§6. Разрешимые частные случаи	49
Глава 2 Теории счётных множеств	54
§1. Расширение списка аксиом	54
§2. Условие счётности	58
§3. Константы натурального ряда	64
§4. Предикат неравенства	68
§5. Исчисления I_N^1 и I_N^Z	76
Глава 3 Разрешающие процедуры на счётных множествах	82
§1. Рекурсивные функции	82
§2. Формально алгебраическое представление	88

§3. Рекурсивные предикаты	96
§4. Универсальные функции	102
§5. Полная система предикатов	107
§6. Арифметические функции	117
Глава 4 Математика континуума	126
§1. Вещественные числа	126
§2. Рекурсивные операции и функции	131
§3. Функции вещественной переменной	140
§4. Представление теорем анализа	144
§5. Разрешающая процедура для ОНФС 1-го порядка	153
§6. Классы эквивалентности	161
§7. Общий случай ОНФС	165
Глава 5 Множества высших мощностей	172
§1. Отображение предикатов в множество элементов	172
§2. Условие континуума	180
§3. Условия для высших мощностей	185
§4. Исчисления предикатов высших порядков	196
§5. Быстрорастущие функции	199

Введение

Постановка и решение основной массы задач математики в общих чертах сводится к следующей схеме. Сначала дается модельная формулировка задачи: фиксируется некоторое множество (конечное или бесконечное), на котором определяются операции с элементами этого множества. Сама задача записывается как некая формула, содержащая указанные операции и логические связки. При этом, в первую очередь, возникает вопрос о корректности постановки задачи в модельной формулировке. Строгие определения будут даны ниже, сейчас же мы ограничимся следующей наглядной картинкой. Предположим, что мы располагаем неким абстрактным компьютером, позволяющим выполнить бесконечное число операций за конечное время. Тогда можно считать, что задача сформулирована корректно, если у нас достаточно данных, чтобы запрограммировать этот компьютер и получить ответ.

Пусть, например, требуется определить, существует ли решение у уравнения $f(x)=0$. Тогда в формулировке задачи функция $f(x)$ должна иметь определение, достаточное для ее вычисления при всех x из исходного множества M . В частности, задача об отыскании корней уравнения

$$x^3 + y^3 = z^3 \quad (1)$$

на множестве натуральных чисел имеет корректную формулировку и сводится к проверке (1) для всех троек натуральных чисел x, y, z .

Поскольку в реальном мире существование упомянутого компьютера невозможно, приходится искать какой-то другой способ решения поставленных задач. И такой способ существует, причем имеет достаточно универсальный характер, - это

аксиоматический подход. Его суть состоит в следующем. Задается некоторое множество корректно сформулированных задач (формул). Из него выделяется конечное подмножество формул, которые мы имеем основание считать истинными. Эти формулы объявляются аксиомами. Кроме того, формулируется некоторое конечное число правил вывода, каждое из которых позволяет из одной или нескольких истинных формул получить еще одну истинную формулу. Если описанным способом за конечное число шагов может быть установлена истинность некоторой формулы, то такую формулу будем называть доказуемой.

Таким образом, исходная задача сводится к установлению доказуемости модельной формулировки, либо ее отрицания. Соответственно, ответ будет положительным или отрицательным. Описанная схема является универсальной для решения математических задач, даже если в ходе решения задачи не дается строгого и формального определения приведенных выше понятий и процедур. Обычно весь этот процесс реализуется, в значительной мере, в неявной форме, что не отменяет его фактического существования. Обобщая, можно сказать, что задача математика при решении конкретной задачи состоит в превращении бесконечного в конечное: исходно модельная постановка, предусматривающая бесконечную процедуру, должна быть переписана как конечная цепочка преобразований аксиом с помощью правил вывода. Например, для установления того факта, что уравнение (1) не имеет корней, в исходной постановке задачи требуется проверка для бесконечного числа троек x, y, z . Однако, исходя из аксиом, определяющих операции сложения и умножения для натуральных чисел, и применяя известные правила вывода, мы можем установить этот факт за конечное число шагов.

Вышеизложенное требует некоторых дополнительных замечаний. Если исходное множество M конечно, то задача может быть решена за конечное число шагов уже в модельной формулировке без привлечения аксиоматического вывода. С другой стороны, можно изначально сформулировать теорию как аксиоматическую (например, теорию групп и др.) и доказать ряд теорем с помощью правил вывода. Однако делается это не как самоцель ради механических упражнений с набором буквенных символов. Обычно такая система аксиом имеет разнообразные модельные интерпретации, и все доказанные теоремы будут применимы к каждой из этих моделей.

В реальной физической задаче может присутствовать бесчисленное множество различных факторов и взаимодействий, влияющих на конечный результат. Все их учесть невозможно, и поэтому приходится прибегать к упрощенной математической модели, содержащей абстрактные идеализированные понятия. Какие идеализированные конструкции выбрать и какими взаимодействиями пренебречь, решает непосредственно учёный естествоиспытатель. Эта проблема лежит вне сферы действия математики. Нас же далее будут интересовать проблемы соответствия модельной и аксиоматической интерпретаций.

Основными вопросами, возникающими при рассмотрении той или иной аксиоматической системы, являются вопросы полноты и непротиворечивости системы. Непротиворечивость той или иной аксиоматической теории устанавливается самим фактом существования её модельной интерпретации. Однако такое утверждение носит не вполне строгий, эвристический характер. Поэтому может возникнуть желание доказать непротиворечивость теории более строгими формальными методами. Но этому препятствует одно обстоятельство, на которое указал Гёдель [4,6]: доказательство непротиворечивости

аксиоматической теории можно реализовать лишь в том случае, если мы располагаем доказательством непротиворечивости той метатеории, в рамках которой осуществляется требуемое доказательство. Таким образом, доказательство непротиворечивости частной аксиоматической теории сводится к доказательству непротиворечивости некоторой более общей теории.

Тем не менее, в плане конкретных практических приложений решение вопроса о непротиворечивости теории путём построения модельной интерпретации оказывается вполне приемлемым, хотя и не абсолютно строгим.

Совершенно другая ситуация возникает при рассмотрении проблемы полноты аксиоматической теории. К началу XX века математика в целом достигла значительных успехов, и на этом фоне у ряда математиков возникла естественная идея: «Хорошо бы для наиболее значимых модельных теорий построить некий алгоритм, позволяющий для произвольного утверждения (формулы) данной теории получить ответ об истинности этого утверждения». Ответ на поставленную задачу был дан Гёделем в 1931 г. [1, 2, 3]. Он установил, что теория, содержащая операции сложения и умножения на множестве натуральных чисел, неаксиоматизируема и неразрешима, т.е. искомый алгоритм отсутствует.

Отсюда следует также неразрешимость любой другой теории, содержащей операции сложения и умножения на бесконечном множестве, и потому являющийся более общей теорией по отношению к арифметике Гёделя. Таковыми являются почти все практически значимые теории.

Точные формулировки понятий аксиоматизируемости и разрешимости будут даны ниже, сейчас же ограничимся предварительными разъяснениями.

Для любой рассматриваемой теории мы будем предполагать, что у нас имеется некоторый способ перечисления всех высказываний (формул) теории. Таким образом, номера истинных высказываний образуют подмножество N_U множества натуральных чисел N .

Разрешимость теории означает, что множество N_U рекурсивно, т.е. существует алгоритм, позволяющий установить, принадлежит произвольное натуральное число множеству N_U или нет.

Если имеется бесконечная последовательность натуральных чисел и задан алгоритм вычисления произвольного члена последовательности, то такое множество натуральных чисел называется рекурсивно перечислимым. Очевидно, что всякое рекурсивное множество является рекурсивно перечислимым. Обратное же, в общем случае, неверно, и причина заключается следующем. Пусть с помощью некоторого алгоритма мы можем вычислить произвольное число членов последовательности, и требуется определить, встретится ли некоторое заданное число среди членов последовательности. Если данное число действительно принадлежит последовательности, то на каком-то конечном шаге оно встретится, и ответ будет положительным. В противном случае ни на каком конечном шаге в процессе вычисления членов последовательностей мы не сможем дать определённого ответа о принадлежности последовательности этого числа. Ответ может быть получен только после завершения всей бесконечной процедуры, в то время как алгоритмическая процедура предполагает получение окончательного ответа на

конечном шаге. Отметим, что если множество N_1 и его дополнение $N - N_1$ являются рекурсивно перечислимыми, то они оба рекурсивны (теорема Поста) [1].

Пусть некоторая теория имеет модельную и аксиоматическую формулировки. Далее будем различать множество истинных (модельно истинных) и доказуемых утверждений. Основное требование к аксиоматической формулировке состоит в том, чтобы множество доказуемых утверждений было рекурсивно перечислимым. Действительно, если имеется конечное число аксиом и правил вывода, то последовательным применением этих правил к уже доказанным формулам получаем рекурсивно перечислимое множество доказуемых формул. Правда, часто рассматриваются теории, содержащие бесконечное число аксиом. Однако, поскольку мы не можем явно выписать все эти аксиомы, то формулировка такой теории, по необходимости, должна содержать некое правило, перечисляющее все эти аксиомы. Таким образом, фактически мы имеем дело с правилом вывода, а не с бесконечной последовательностью аксиом. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать число аксиом и правил вывода конечным.

Предметом дальнейшего рассмотрения является исследование соотношения двух множеств: истинных и доказуемых утверждений. Далее будем предполагать непротиворечивость аксиоматической формулировки. Это означает, что всякое доказуемое утверждение истинно. Тогда вся проблема сводится к установлению доказуемости произвольной истинной формулы в рамках фиксированной системы аксиом. Если такая система существует, то теория называется аксиоматизируемой. Это означает, что множество истинных формул теории рекурсивно перечислимо.

Гёдель доказал, что множество истинных формул арифметики не является рекурсивно перечислимым множеством и потому арифметика неаксиоматизируема. Это означает, что любая корректно сформулированная в указанном выше смысле аксиоматическая система для арифметики неполна.

Вслед за доказательством неразрешимости арифметики последовала серия работ, посвящённых разрешимости, либо неразрешимости тех или иных теорий [1,3,6,9], и в настоящее время мы можем провести достаточно отчётливую грань между разрешимыми (более простыми) теориями и неразрешимыми (более сложными). Казалось бы, в данном вопросе достигнута полная ясность, однако это не совсем так.

Проблема в том, что следует понимать под решением той или иной математической задачи. Если, например, для алгебраического уравнения найдено решение, записанное через радикалы, то это является решением поставленной задачи, достигнутое за конечное число шагов. То же самое относится и к задаче о вычислении интеграла от элементарной функции, если этот интеграл является элементарной функцией. Однако не все алгебраические уравнения разрешимы в радикалах и не все интегралы от элементарных функций выразимы в элементарных функциях. В этом случае можно прибегнуть к численным методам решения: методу хорд или методу Ньютона для алгебраического уравнения, а для интеграла – формулам Симпсона, Гаусса или степенным рядам. Принципиальное отличие численных методов от полных решений в том, что искомое решение может быть получено только как предел некоторой бесконечной последовательности, а за конечное число шагов можно найти только приближённое значение ответа, правда, с произвольно высокой точностью.

При этом у нас не создаётся впечатления, что указанные задачи неразрешимы, поскольку ответ за конечное число шагов недостижим. Дело в том, что по общепринятым в математике представлениям ответ на поставленную задачу может быть записан как в финитном виде (найден за конечное число шагов), так и в форме бесконечной последовательности, имеющей предел. Разумеется, предпочтительным будет финитный ответ, но его отсутствие ещё не означает, что задача неразрешима.

Говоря о термине «неразрешимость», следует иметь в виду, что нет неразрешимости «вообще». Каждый раз следует уточнять: алгебраические уравнения 5-й степени неразрешимы в радикалах, задача вычисления эллиптических интегралов неразрешима в элементарных функциях, арифметика Гёделя неразрешима в общерекурсивных функциях и т.д. Поэтому факт неразрешимости той или иной теории – это не конец проблемы, а её начало: «Если теория неразрешима в общерекурсивных функциях, то в каких разрешима?» И здесь следует указать на одно обстоятельство. Если в задачах об отыскании значений предметной переменной (из некоторого множества M) решение может быть записано как финитной, так и в нефинитной форме, то для логических переменных по сложившейся практике решение принимается только в финитной форме. Иными словами установление истинности высказывания (доказательство теоремы) должно быть осуществлено за конечное число шагов. Это ограничение носит искусственный характер, и мы будем рассматривать как конечные, так и бесконечные процедуры для установления истинности высказываний.

Логические правила вывода, выходящие за пределы классической финитной логики, будем называть нефинитными. Приведем пример такого нефинитного вывода. Построим бесконечную c_1, c_2, c_3, \dots последовательность чисел 0 и 1, по

следующему правилу: если существуют x, y, z , удовлетворяющие (1), причём $x, y, z \leq n$, то $c_n = 1$. В противном случае $c_n = 0$. Ясно, что эта последовательность монотонно не убывает, т.е., если $c_n = 1$, то для всех $m > n$ имеем $c_m = 1$. В силу ограниченности такая последовательность имеет предел. В действительности мы располагаем финитным доказательством того, что (1) не выполняется ни при каких натуральных x, y, z . Это обесценивает приведённое нефинитное доказательство. Но при отсутствии финитного доказательства нефинитный вывод, аналогичный приведённому выше, решает поставленную задачу с ограниченной степенью достоверности для достаточно больших n , причём эта степень достоверности неограниченно приближается к единице при $n \rightarrow \infty$. Аналогично численные методы позволяют найти приближённое значение предметной переменной в том случае, если нет точного финитного решения, причём точность искомого значения неограниченно растёт с ростом числа операций, и в пределе мы получаем точное значение.

Выше мы говорили, что задача математики, образно говоря, состоит в превращении бесконечного в конечное. Теперь же получается, что ответом может быть и бесконечная процедура, поэтому необходимо сделать некоторые уточнения. Следует различать актуальную бесконечность и потенциальную. Если сначала задаётся бесконечное множество, а затем на нём определяются те или иные операции и формулируется задача, то это актуально бесконечное множество. В том числе, все канторовские бесконечные множества являются актуальными. Работа упомянутого выше абстрактного компьютера при перечислении всевозможных вариантов, не может быть прервана ни на каком промежуточном шаге. Ответ на задачу в модельной постановке достигается только после фактического выполнения проверок для всего бесконечного множества до конца.

С другой стороны, задача о вычислении значений функции $y = \sin x$ даёт пример потенциальной бесконечности. Формально эта функция вычисляется через бесконечный степенной ряд, однако для нахождения конкретных значений $\sin x$ нам вовсе не требуется вычислять этот ряд до конца. В зависимости от заданной точности вычисляется только конечное число членов ряда, правда, оно может быть сколько угодно велико. Таким образом, задача математика в уточнённой форме выглядит так: превратить актуально бесконечное в конечное или потенциально бесконечное.

Рассмотренный выше пример построения нефинитного доказательства для (1) представляет достаточно тривиальный способ преобразования актуально бесконечной счётной процедуры в потенциальную: бесконечную последовательность, имеющую предел. В общем случае на такой тривиальный вывод рассчитывать не приходится, и мы можем очертить расширенный круг задач, допускающих нефинитное решение, по сравнению с финитно решаемыми задачами.

Может показаться, что нефинитная логика применима только в отношении достаточно абстрактных математических конструкций, однако это совсем не так. Простейшим примером является достаточно широкий круг задач, связанных с численным решением уравнений математической физики на ЭВМ. Строго говоря, прежде чем начинать программировать и переносить задачу на ЭВМ, необходимо доказать, что данная система уравнений имеет единственное решение, и выбранная численная схема сходится к этому решению. На практике же такое финитное доказательство реализуемо далеко не всегда. Поэтому численная процедура запускается без какого-либо строгого доказательства по принципу «получится – не получится, сойдётся – не сойдётся». Если численный процесс имеет очевидную

тенденцию к сходимости с ростом числа операций, то мы можем рассматривать его как нефинитное доказательство факта сходимости процесса, оборванное на конечном шаге и потому имеющее ограниченную (неполную) степень достоверности. Разумеется, предпочтительнее иметь строгое финитное доказательство (с полной степенью достоверности сходимости), но, за неимением такового, приходится ограничиваться частичным нефинитным доказательством.

На самом деле сфера приложений нефинитной логики гораздо шире. В том числе, так называемая «бытовая» логика фактически является нефинитной. Пусть некто должен принять решение на основании информации и советов, полученных от знакомых, родственников, средств массовой информации и т.д. Данная задача отличается от корректно сформулированной математической тем, что последняя отталкивается от системы аксиом, каждая из которых принимается как абсолютная истина. Весь дальнейший ход рассуждений также представляет цепочку стопроцентно истинных высказываний, полученных с помощью заранее оговорённых правил вывода. В реальной ситуации исходная информация не является абсолютно достоверной. Это приводит к тому, что, хотя некто и не знает, какие высказывания истинны, а какие ложны, но он может установить наличие противоречий в собранных воедино утверждениях. В силу ограниченной достоверности исходной информации такая ситуация является типичной. С точки зрения классической финитной логики исходная система аксиом в этом случае противоречива, а в такой системе любое утверждение является истинным, т.е. рассмотрение в рамках обычной математической логики невозможно. В реальной жизни данная ситуация не вызывает никаких проблем. На основании имеющегося опыта предшествующего общения с каждым из источников информации некто оценивает степень достоверности каждого

утверждения (например, 70%, 40%, ... и т.д.). С учётом этого обстоятельства осуществляется анализ всей информации и делается соответствующий вывод (также с ограниченной степенью достоверности). Если же уровень достоверности окончательного результата представляется недостаточным, то некто должен осуществить поиск дополнительной информации с целью повышения надёжности выводов. Этот процесс укладывается в рамки процедур нефинитной логики.

Поиск оптимального хода в игровых ситуациях также может быть представлен как нефинитная процедура. Для примера рассмотрим игру в шахматы. В принципе оптимальный ход может быть найден финитными средствами. Для этого достаточно рассмотреть всевозможные ходы игрока и ответы противника до окончания партии. Однако чисто технически финитный расчет невозможно реализовать ни на одной ЭВМ ввиду огромного числа вариантов. На практике выбор хода осуществляется рассмотрением ограниченного числа вариантов, руководствуясь некоторыми принципами: фигуры следует размещать на активной позиции с большой свободой действия, король должен быть закрыт пешками от угроз неприятеля и т.п. Эти утверждения, однако, не являются абсолютными истинами. Возможны варианты, когда король сам поддерживает свои фигуры в атаке, активностью некоторых фигур можно пожертвовать ради выигрышной комбинации и т.д. В реальной ситуации решение принимается по совокупности принципов, каждый из которых имеет ограниченную степень достоверности.

Наиболее характерным примером является процедура поиска финитного доказательства утверждения в рамках аксиоматической теории. Казалось бы, здесь нет проблем, поскольку доказуемые формулы рекурсивно перечислимы. Однако с ростом числа шагов n количество доказуемых

утверждений растёт как $n!$. Для доказательства теоремы средней трудности требуется порядка 30 – 50 раз применить то или иное правило вывода к исходным аксиомам. Это делает практически невозможным осуществить прямой финитный поиск доказательства на ЭВМ любой мощности.

На практике для построения доказательства используется совсем другой подход. Выдвигается ряд промежуточных утверждений (гипотез) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ таких, что искомое утверждение φ получается из аксиом через цепочку $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. При этом изначально степень достоверности может быть невелика и носить чисто интуитивный характер. Дальнейшие усилия направлены на то, чтобы либо повысить степень достоверности утверждений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, либо опровергнуть какое либо утверждение и начать сначала. Повышение достоверности может осуществляться разными способами: численными экспериментами на ЭВМ, рассмотрением частных случаев и т.п. Если промежуточные гипотезы выдерживают проверки, то имеет смысл начать поиск финитного доказательства каждого из утверждений. Таким образом, поиск финитного доказательства для φ идёт не от начала к концу, а путём повышения степени достоверности всей цепочки сразу.

Рассмотренные примеры показывают, что по факту сфера применения нефинитной логики весьма велика, хотя обычно она используется неформально на интуитивном уровне. Естественно, возникает задача формализации и более строгого изучения методов нефинитной логики. В качестве аналогии можно привести ситуацию с дифференциальным и интегральным исчислением, которое длительное время (и весьма успешно) развивалось на эвристической основе, и только в XIX веке были

даны строгие определения понятий вещественного числа, функции, предела и т.д.

В настоящей работе мы не будем заниматься практическими приложениями нефинитной логики, а сосредоточим внимание на вопросах принципиального характера. К таковым относятся, прежде всего, проблемы разрешимости и неразрешимости тех или иных теорий средствами нефинитной логики.

Центральное место здесь занимает построение разрешающей процедуры для всей математики континуума (далее просто C -математики), охватывающей всевозможные корректно сформулированные утверждения на счётных и континуальных множествах. Иначе говоря, C -математика охватывает всю «обычную» математику за исключением высказываний, содержащих понятие множества более высокой мощности, чем континуум.

Предварительно осуществляется построение логического формализма C -математики. Далее показано, что все утверждения «обычной» математики для указанных множеств могут быть записаны в этом формализме, а все финитные доказательства реализованы средствами формализма (как финитные). Подчеркнем, что последнее утверждение не может рассматриваться как доказательство, а лишь как «тезис», поскольку у нас нет точной формулировки того, что считать математикой континуума. Поэтому мы по определению полагаем, что данный формализм является C -математикой и иллюстрируем примерами, показывающими совпадение формального и интуитивно понимаемого представления о математике континуума. Затем осуществляется построение нефинитной разрешающей процедуры для формализма C -математики.

Из сказанного выше не следует, что все проблемы математики решены, и делать в математике больше нечего. Простой анализ показывает, что число операций, необходимых для установления истинности даже сравнительно простых утверждений предложенной процедурой, за пределами велико и не может быть реализовано ни на какой ЭВМ. Результат носит чисто теоретический характер и не имеет никакого прикладного значения. Тем не менее, даже чисто теоретическое значение для нас крайне важно. Дело в том, что в финитно неразрешимой теории всё множество высказываний делится на 3 части: определённо истинные, определённо ложные и высказывания, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты. По поводу последних в математической среде возникает следующая дискуссия. Одни математики полагают, что эти высказывания обладают некоторой истинностью, хотя для её установления мы не располагаем никакими средствами. Другие считают, что, поскольку нет никакого способа установить их истинность, то сама постановка вопроса бессмысленна и следует ввести трёхзначную логику, в которой есть истинные, ложные и не имеющие никакой истинности высказывания. Это течение носит название интуиционизма, и его сторонники пытаются развивать математику на основе трёхзначной логики [7].

Полученный результат означает, что, по крайней мере, С–математика содержит только либо определённо истинные, либо определённо ложные утверждения, и таким образом, снимает поставленную проблему трёхзначности.

Построенная разрешающая процедура для С–математики даёт ещё одно важное следствие – отсутствие «чистого существования» в С–математике. Дело в том, что сложившаяся практика допускает рассмотрение аксиоматических теорий, в которых присутствует «чистое существование», т.е., например,

может быть доказано существование вещественного x , удовлетворяющего $f(x)$, но при этом из доказательства не вытекает никакого способа нахождения конкретного значения x . С практической точки зрения такой результат бесполезен, поскольку прямой перебор всех значений x на континууме выходит за рамки как финитных, так и нефинитных процедур. Источником такого рода результатов с «чистым существованием» могут, в частности, выступать теории, содержащие аксиому выбора, и др. Формализм S –математики не допускает возникновения «чистого существования». Если нефинитными средствами доказана истинность некоторого утверждения, содержащего переменные, связанные квантором существования, то непосредственно из доказательства вытекает нефинитная процедура вычисления этой переменной. Под переменной здесь понимается вещественное число, функция, оператор, функционал и т.д. Таким образом, дополнение S –математики какими-либо неконструктивными аксиомами теории множеств (типа аксиомы выбора) не дает никаких новых результатов, а может лишь привести к противоречивости всей S –математики.

Глава 1

Замкнутое исчисление предикатов

§1. Определение формализма I^Z

Задание логического формализма начинается с определения его языковых средств – перечисления символов, обозначений и операций, используемых в формализме. При этом символы и операции имеют некоторый неформальный содержательный смысл, определяемый той модельной конструкцией, которую описывает данный формализм. Исчисление I^Z отличается от хорошо изученного исчисления предикатов 1-го порядка I^1 тем, что допускает связывание кванторами не только предметных переменных x, y, \dots , но и предикатов, содержащих эти переменные. Таким образом, все свободные переменные (предметные и предикаты) могут быть связаны кванторами, что и обуславливает название «замкнутое исчисление предикатов».

Формализм I^Z состоит из формул. Формулой является:

1. Константа U , означающая истинное высказывание.
2. Переменный предикат $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - произвольная функция, заданная на произвольном множестве M (конечном или бесконечном) и принимающая 2 значения: истина и ложь ($n=0, 1, 2, \dots$). Предметные переменные далее будем обозначать малыми латинскими буквами с индексом или без: x, y, z, x_1, z_2, \dots . Символы предикатов будем обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, A_1, P_2, \dots . При $n = 0$ переменный предикат превращается в переменное высказывание. Произвольные формулы I^Z далее будем обозначать большими греческими буквами Φ, Ψ, \dots . Подчеркнем, что сами эти символы не

являются внутренними средствами I^Z , а являются понятиями метаязыка.

3. Если Φ – формула I^Z , то $\bar{\Phi}$ - отрицание Φ , также формула I^Z . Содержательный смысл операции отрицания – значение истинности Φ , зависящее от входящих в Φ переменных, меняется на противоположное.

4. Если Φ, Ψ - формулы, то $(\Phi + \Psi)$ - логическая сумма, формула I^Z . Сумма $(\Phi + \Psi)$ в содержательном смысле при заданных значениях входящих в Φ, Ψ переменных истинна тогда и только тогда, когда истинно хоть одно из слагаемых. Если формула Φ содержит предметную переменную x в качестве свободной (не связанной квантором), то это обстоятельство на уровне метаязыка будем обозначать $\Phi(x)$. Аналогично $\Phi(A)$ означает, что Φ содержит свободный предикат A .

5. Если $\Phi(x)$ – формула I^Z , то $\forall x \Phi(x)$ - формула I^Z .

6. Если $\Phi(A)$ – формула I^Z , то $\forall A \Phi(A)$ – формула I^Z .

В пределах произвольной формулы Φ могут встречаться одинаково обозначенные предикаты, но с разным числом переменных. Например, $\Phi = (A_1(x) + A_1(y, z))$. Такие предикаты будем считать различными и изменяющимися независимо друг от друга. Однако для удобства чтения в дальнейшем будем воздерживаться от возникновения таких ситуаций, и обозначать разные предикаты разными буквами. Кроме того, при необходимости, будем указывать число переменных у предиката индексом вверху. Например, $\Phi(A_1^2)$ означает зависимость Φ от двухместного предиката $A_1(y, z)$. Соответственно, $\forall A_1^1 \Phi(A_1^1)$ означает связывание квантором

всеобщности $\forall A_1^1$ предиката $A_1(x)$. Сам предикат может входить в Φ многократно с разными переменными.

Формула $\forall x \Phi(x)$ истинна тогда и только тогда, когда $\Phi(x)$ истинна для всех $x \in M$ при заданных M и остальных свободных переменных $y, z, \dots A, B, \dots$.

Аналогично формула $\forall A \Phi(A)$ истинна тогда и только тогда, когда $\Phi(A)$ истинна для всех n -местных предикатов на M при заданных M и остальных переменных (число n переменных в предикате A усматривается непосредственно из формулы $\Phi(A)$.) Данная операция называется связыванием свободной переменной квантором всеобщности. Подчеркнем, что квантор $\forall A$ относится только к самому предикату A , но не входящим в $A(x_1, \dots, x_n)$ переменным, которые могут быть связаны другими кванторами или остаться свободными.

После связывания квантором переменной (предметной или предиката) эта переменная может быть переобозначена как угодно, при этом сама формула остаётся неизменной (как, например, переменная интегрирования или индекс суммирования). Мы будем далее считать, например, $\forall x \Phi(x)$ и $\forall y \Phi(y)$ просто одной и той же формулой. Аналогично для переименования связанного предиката: $\forall A \Phi(A)$ и $\forall B \Phi(B)$.

В процессе вывода, может происходить объединение двух и более формул в одну, при этом в разных формулах могут присутствовать одинаково обозначенные переменные как связанная и как свободная. Чтобы избежать возможных коллизий, мы предварительно будем переименовывать связанные переменные так, что в любой формуле не могут встретиться 2 одинаково обозначенные переменные как связанная и как свободная, а также 2 квантора, связывающих одинаково

обозначенную переменную. Например, сумму $A(x)$ и $\forall x B(x)$ следует записать $(A(x) + \forall x_1 B(x_1))$, а сумму $\forall x A(x)$ и $\forall x B(x)$ – как $(\forall x A(x) + \forall x_1 B(x_1))$.

Для удобства в дальнейшем лишние скобки будем опускать. Например, $A + B + \bar{B}$ означает формулу $((A + B) + \bar{B})$.

Логический формализм включает в себя понятия аксиом, правил вывода и доказуемых утверждений (формул). Аксиомы по определению являются доказуемыми формулами. Правило вывода, примененное к доказуемым утверждениям (одному или нескольким, в зависимости от формулировки правила), даёт доказуемое утверждение. При этом предполагается, что число аксиом конечно, а правила вывода алгоритмически детерминированы.

Доказуемыми утверждениями являются те и только те формулы, которые могут быть получены указанным способом за конечное число шагов. Требование конечности числа шагов является существенным, и такую логику будем называть финитной. То обстоятельство, что Φ доказуемо, обозначим $\vdash \Phi$. Пусть Ψ выводимо из Φ , т. е. если $\vdash \Phi$, то $\vdash \Psi$. Эту ситуацию будем обозначать $\Phi \Rightarrow \Psi$. Если же верно и обратное $\Psi \Rightarrow \Phi$, то формулы Φ и Ψ будем называть дедуктивно эквивалентными и обозначать $\Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Формализм I^Z состоит из одной аксиомы:

$$A + B + \bar{B} \tag{1.1}$$

и 4-х правил вывода.

1. Правило обобщения.

Пусть $\Phi(A^0)$ произвольная формула I^Z . Тогда

$$\Phi(U) \text{ и } \Phi(\bar{U}) \Leftrightarrow \Phi(A^0). \quad (1.2)$$

Действительно, поскольку переменное высказывание A принимает только 2 значения: U и \bar{U} то $\Phi(A^0)$ будет истинно тогда и только тогда, когда $\Phi(U)$ и $\Phi(\bar{U})$ истинны.

2. Правило элиминации константы \bar{U} .

Пусть $\Phi(A^0)$, Ψ – произвольные формулы I^Z . Тогда

$$\Phi(\bar{U} + \Psi) \Leftrightarrow \Phi(\Psi). \quad (1.3)$$

Эта эквивалентность следует из таблицы истинности для операции сложения. При этом напомним о необходимости избегать коллизии свободных и связанных переменных в Φ и Ψ .

3. Правило связывания квантором \forall .

$$3.1. \quad \Phi(x) + \Psi \Leftrightarrow \forall x \Phi(x) + \Psi, \quad (1.4)$$

где $\Phi(x)$, Ψ – произвольны и Ψ не содержит x . Смысл данной эквивалентности в том, что, если левая часть верна для каждого x , то она верна для всех x . И наоборот.

$$3.2. \quad \Phi(A^n) + \Psi \Leftrightarrow \forall A^n \Phi(A^n) + \Psi. \quad (1.5)$$

То же самое, применительно к переменному предикату $A(x_1 \dots x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

4. Правило подстановки.

4.1. Пусть $\Phi(A^n)$ и $\Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольные формулы ($n = 0, 1, 2, \dots$), которые могут содержать и другие свободные переменные помимо A^n, x_1, \dots, x_n . Тогда

$$\Phi(A^n) \Rightarrow \Phi(\Psi), \quad (1.6)$$

причём замена идёт по всем вхождениям A^n в $\Phi(A^n)$, и в формулу $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ каждый раз подставляются те предметные переменные, которые в данном случае, фигурируют в A^n в качестве аргументов. Эти предметные переменные могут быть как связанные, так и свободные. При необходимости, предварительно осуществляется переименование связанных переменных в Φ и Ψ в процессе подстановок Ψ вместо A^n . Данное правило вывода означает, что, если $\Phi(A^n)$ истинно для любого предиката A^n , то оно истинно, в частности, и для предиката $\Psi(x_1, \dots, x_n)$.

4.2. Правило подстановки в константу U . Пусть $\Phi(A^0)$ – произвольная формула, Ψ – произвольная доказуемая формула. Тогда

$$\Phi(U) \Leftrightarrow \Phi(\Psi). \quad (1.7)$$

Здесь также предварительно устраняется возможная коллизия переменных в Φ и Ψ . Справедливость данной эквивалентности следует из того, что формула Ψ принимает значение U при всех значениях свободных переменных.

§ 2. Доопределение логических операций.

На первый взгляд представляется, что введённых логических операций: отрицания, суммирования и связывания переменных квантором всеобщности – явно недостаточно для выражения сколько-нибудь содержательных математических утверждений, а

одной аксиомы недостаточно для их доказательства. Однако это не так, и целью дальнейшего изложения будет описание всех возможностей формализма I^Z .

Обычно, если языковые средства некоторого формализма недостаточны, вводят дополнительные термины, операции и соответствующие им аксиомы. Мы, однако, выберем совсем другой путь. Введём сокращенные обозначения для следующих выражений в формуле I^Z :

$$\Phi \cdot \Psi \text{ для } \overline{\overline{\Phi} + \overline{\Psi}}, \quad (2.1)$$

$$\Phi = \Psi \text{ для } \overline{\overline{\Phi} + \overline{\Psi}} + \overline{\overline{\Phi} + \overline{\Psi}} \quad (2.2)$$

$$\exists x \Phi(x) \text{ для } \overline{\overline{\forall x \overline{\Phi(x)}}}, \quad (2.3)$$

$$\exists A \Phi(A) \text{ для } \overline{\overline{\forall A \overline{\Phi(A)}}}, \quad (2.4)$$

Содержательный смысл данных операций таков:

$\Phi \cdot \Psi$ – логическое произведение, - истинно тогда и только тогда, когда истинны оба сомножителя (для каждого набора свободных переменных).

$\Phi = \Psi$ – логическая эквивалентность, - истинна тогда и только тогда, когда Φ и Ψ имеют одинаковую истинность, при всех значениях свободных переменных.

$\exists x, \exists A$ - кванторы существования для предметных переменных x и предикатов A . $\exists x \Phi(x), (\exists A \Phi(A))$ - истинно тогда и только тогда, когда существует x (предикат A), при котором Φ истинно.

Смысл такого подхода состоит в том, что введенные операции являются понятиями метаязыка, а не внутренними языковыми средствами формализма. Поэтому все ранее доказанные

метатеоремы о формализме I^Z сохраняют силу, в то время как любое расширение формализма требует пересмотра метатеорем.

В связи с введенными операциями (2.1) – (2.4), а также возможными дополнительными новыми понятиями возникают 2 вопроса:

1. Насколько ёмким окажется данный подход, т.е. как далеко в содержательном смысле мы сможем продвинуться по этому пути.
2. Какие дополнительные аксиомы потребуются для вновь введенных операций.

Далее мы покажем, что с использованием этого приёма в формализме I^Z могут быть записаны все утверждения «обычной» математики, а для их доказательства не потребуется ни одной дополнительной аксиомы, кроме (1.1). Термин «обычная» математика взят в кавычки, поскольку у нас нет такого формального определения математики. Здесь ситуация аналогична с введением в теорию алгоритмов «тезиса Черча», который состоит в том что выполнение любой алгоритмической процедуры может быть отождествлено с вычислением общерекурсивной функции. Тезис Черча не является теоремой, поскольку нет другого определения понятия алгоритма, а есть только интуитивное понимание того, что такое алгоритм. Мы можем только подтвердить данный тезис многочисленными примерами.

Отметим, что мы можем даже еще сильнее ограничить себя в языковых средствах I^Z , а именно, не вводить константу U , вместо двух операций $\bar{\Phi}$ и $\Phi + \Psi$ (отрицания и сложения) оставить одну: $[\Phi, \Psi] : \overline{\Phi \cdot \Psi}$, носящую название скобок Шеффера, и сохранить только двухместные предикаты.

Действительно, аксиому (1.1) можно обозначить символом U (понятие метаязыка) и использовать в этом качестве в правилах вывода. Операции отрицания $\bar{\Phi}$, сложения $\Phi + \Psi$ и умножения $\Phi \cdot \Psi$ выражаются так: $[\Phi, \Phi]$, $[[\Phi, \Phi], [\Psi, \Psi]]$, $[[\Phi, \Psi], [\Phi, \Psi]]$. Кроме того ниже будет показано, что n -местные предикаты могут быть выражены через 2 -местные, а 1 -местные могут быть записаны как $A(x, x)$. Тем не менее далее будет использована именно введенная выше языковая система как более удобная и привычная.

Обратимся к рассмотрению формализма I^Z по- существу. Полагая в правиле 4.2 $\Phi(A^0)$ равным A^0 и Ψ равным $A + B + \bar{B}$, получаем $\vdash U$. Подставляя в (1.1) $A \rightarrow \bar{U}$ с учётом правила 2, получаем $\vdash B + \bar{B}$. Подставляя в последнюю формулу $B \rightarrow \bar{U}$, получаем $\vdash \bar{U}$, а при подстановке $B \rightarrow U$ имеем $\vdash U + \bar{U}$. Подставляя в (1.1) $A \rightarrow U, B \rightarrow \bar{U}$, получаем $\vdash U + \bar{U} + \bar{\bar{U}}$. По правилу 4.2 сумму $U + \bar{U}$ заменяем на U : $\vdash U + \bar{\bar{U}}$, и по тому же правилу $\bar{\bar{U}}$ заменяем на U : $\vdash U + U$.

Если в формализме I^Z рассматривать только бескванторные формулы, содержащие только свободные переменные высказывания, то такая теория I_0^1 носит название исчисления высказываний. Истинность той или иной формулы $\Phi(A_1^0, \dots, A_n^0)$ исчисления I_0^1 в общем случае может быть установлена подстановкой всевозможных наборов из n констант U или \bar{U} . Если формула истинна для всех 2^n наборов, то она считается истинной (общезначимой).

Все истинные формулы I_0^1 доказуемы. Для этого достаточно по правилу 1 образовать 2^n формул, содержащих только константы U, \bar{U} и доказать каждую из формул в отдельности. Это

всегда возможно с использованием правил 2, 4,2 и доказанных выше формул $\bar{\bar{U}}$, $U + \bar{U}$, $U + U$.

Истинные формулы исчисления высказываний образуют булеву алгебру, хорошо изучены и имеют массу приложений. Поэтому в дальнейшем мы будем просто записывать необходимую для текущего рассмотрения формулу без доказательства, предоставляя её вывод на рассмотрение читателя. Кроме того, для упрощения записи формул **I**² будем опускать лишние скобки, полагая, что операция связывания квантором выполняется раньше умножения, умножение – раньше сложения, а сложение – раньше эквивалентности.

Приведем основные формулы, выражающие коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность операций сложения и умножения:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA \quad (2,5)$$

$$A + B + C = A + (B + C) \quad ABC = A(BC) \quad (2,6)$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad A + BC = (A + B)(A + C) \quad (2,7)$$

Отметим, что каждая истинная эквивалентность исчисления высказываний имеет дуальную истинную эквивалентность, получаемую заменой сложения на умножение и наоборот, а также заменой $U \rightleftharpoons \bar{U}$.

Операция эквивалентности также коммутативна, ассоциативна и транзитивна:

$$(A = B) = (B = A), \quad (2.8)$$

$$((A = B) = C) = (A = (B = C)), \quad (2.9)$$

$$\overline{A = B} + \overline{B = C} + (A = C) \quad (2.10)$$

Для операции импликации, выражающей связку «если A , то B », мы не будем вводить специального обозначения, а будем просто записывать $\bar{A} + B$, поскольку соответствующие таблицы истинности совпадают. Отметим равносильность формул $\overline{A \cdot B} + C$ и $\bar{A} + \bar{B} + C$, означающих: «если A и B , то C ». Легко проверить, что операция импликации также транзитивна:

$$\overline{\bar{A} + B} + \overline{B + C} + \bar{A} + C. \quad (2.11)$$

§ 3. Расширение правил вывода.

Другим направлением изучения возможностей формализма I^Z является построение новых правил вывода. Как и в § 2, новые правила выводятся и доказываются из правил 1 – 4 на уровне метаязыка, не меняя самого формализма I^Z .

В первую очередь, сформулируем правило «модус поненс». Для произвольных Φ, Ψ имеем:

$$\bar{\Phi} + \Psi, \quad \Phi \Rightarrow \Psi \quad (3.1)$$

По правилу 4.2 заменяем $\Phi \rightarrow U$ и, с учётом правила 2, получаем (3.1). Правило означает следующее: пусть доказана импликация «если Φ то Ψ ». Тогда, если доказуемо условие Φ , то доказуемо и следствие Ψ .

Достаточно простым и очевидным является правило:

$$\Phi \Leftrightarrow \Phi = U \quad (3.2)$$

Оно выводится из доказуемых формул исчисления высказываний $\bar{A} + (A = U)$ и $\overline{A = U} + A$ подстановкой $A \rightarrow \Phi$ и правила модус поненс. Это правило нам будет необходимо в следующих

ситуациях. Пусть, например, $\vdash \Phi + \Psi$, нужно доказать $\Psi + \Phi$. У нас есть формула $\vdash A + B = B + A$, куда можно подставить Φ и Ψ : $\Psi + \Phi = \Phi + \Psi$, откуда следует $\vdash \Psi + \Phi = U$. С учетом (3.2) получаем искомое $\vdash \Psi + \Phi$.

В общем случае, для произвольных Φ, Ψ справедливо:

$$\text{если } \Phi = \Psi, \text{ то } \Phi \Leftrightarrow \Psi. \quad (3.3)$$

Это правило доказывается аналогично вышеприведённому. Логическая эквивалентность двух формул сильнее дедуктивной эквивалентности: из логической эквивалентности следует дедуктивная, но, в общем случае, не наоборот. Действительно, логическая эквивалентность означает равенство Φ и Ψ при любых значениях свободных переменных, входящих, в Φ, Ψ , в то время как дедуктивная эквивалентность означает, что, если Φ истинно при всех значениях свободных переменных, то и Ψ истинно при всех значениях, и наоборот.

Далее будем использовать еще 2 очевидных правила:

$$\Phi \text{ и } \Psi \Leftrightarrow \Phi \cdot \Psi, \quad (3.4)$$

$$\bar{\Phi} + \Psi \text{ и } \bar{\Psi} + \Phi \Leftrightarrow \Phi = \Psi, \quad (3.5)$$

вывод которых осуществляется из формул

$$\bar{A} + \bar{B} + AB, \quad \overline{A \cdot B} + A, \quad (\bar{A} + B) \cdot (\bar{B} + A) = (A = B).$$

Они означают следующее, для доказательства произведения достаточно доказать истинность каждого из сомножителей (и наоборот). Для доказательства эквивалентности $\Phi = \Psi$ достаточно доказать обе импликации $\bar{\Phi} + \Psi$ и $\bar{\Psi} + \Phi$ (и наоборот).

Правила вывода 1 – 4 можно усилить, заменив дедуктивную эквивалентность логической. Докажем это. В правиле 1 необходимо предварительно связать переменную квантором всеобщности:

$$\Phi(U) \cdot \Phi(\bar{U}) = \forall A \Phi(A^0) \quad (3.6)$$

Прямое следование (3.6) доказывается снятием квантора $\forall A$ и применением правила 1. Обратное следование доказывается с помощью дистрибутивного закона сложения по отношению к произведению $\Phi(U) \cdot \Phi(\bar{U})$. Нам нужно доказать

$$\overline{\forall A \Phi(A^0)} + \Phi(U) \text{ и } \overline{\forall A \Phi(A^0)} + \Phi(\bar{U}) \quad (3.7)$$

Имеем: $\vdash \overline{\forall A \Phi(A^0)} + \forall B \Phi(B^0)$.

Снимая квантор $\forall B$ и подставляя U вместо B^0 получаем 1-ю формулу (3.7). Аналогично получаем 2-ю формулу после подстановки $B^0 \rightarrow \bar{U}$.

Правило 2 переписывается непосредственно:

$$\Phi(\bar{U} + \Psi) = \Phi(\Psi) \quad (3.8)$$

применением правила 2 к равенству $\Phi(\Psi) = \Phi(\Psi)$.

Правило 3.1 непосредственно мы можем переписать только как

$$\forall x (\Phi(x) + \Psi) = \forall y \Phi(y) + \Psi, \quad (3.9)$$

и оно означает, что слагаемое, не зависящее от связанной переменной, можно выносить из-под действия квантора всеобщности. Без квантора $\forall x$ формула (3.9) недействительна. Доказательство осуществляется тем же приёмом, что и (3.7).

Правило 3.2 переписывается и доказывается аналогично:

$$\forall A(\Phi(A) + \Psi) = \forall B \Phi(B) + \Psi. \quad (3.10)$$

Наконец, правило 4.2 можно видоизменить так:

$$\bar{\Psi} + (\Phi(\Psi) = \Phi(U)) \quad (3.11)$$

Для доказательства (3.11) заменяем $A \rightarrow \Psi$ в формуле

$$\bar{A} + (\Phi(A) = \Phi(U)), \quad (3.12)$$

которая, в свою очередь, доказывается с помощью правила 1. Отметим, что Ψ в (3.11) может быть любым (не обязательно $\vdash \Psi$).

$$\text{Формулы} \quad \overline{\forall x A(x)} + A(y), \quad (3.13)$$

$$\overline{A(x)} + \exists y A(y) \quad (3.14)$$

выводятся непосредственно из правила 3.1 и определения квантора существования.

Суммарно, с учётом правила «модус поненс» и (3.13), (3.14), формализм I^Z позволяет вывести все доказуемые формулы исчисления предикатов 1-го порядка [2]. С другой стороны, поскольку в I^Z есть дополнительные возможности в виде получения формул со связанными предикатами на

промежуточных этапах вывода, то можно было бы поставить вопрос о том, что в I^Z доказуемы какие-то дополнительные формулы I^1 , не доказуемые при другом определении I^1 . Однако, в силу теоремы Гёделя о полноте [2,6], в стандартной формализации исчисления предикатов первого порядка доказуемы все истинные формулы. Поэтому множество доказуемых формул в обоих случаях совпадает.

Формализм I^Z , мы могли бы просто сформулировать как стандартное исчисление предикатов 1-го порядка, дополненное правилом 3.2. Однако в дальнейшем нам придётся решать вопросы, связанные с доказательством разрешимости и неразрешимости, отдельных подтеорий I^Z , поэтому нам необходимо максимально компактное исходное определение I^Z , чтобы избежать в дальнейшем громоздких и необозримых формул.

§ 4. Правило эквивалентной замены.

Правило 4.2 можно усилить, поставив в условие произвольную эквивалентность $\Psi_1 = \Psi_2$, а не только $\Psi = U$:

$$\overline{\Psi_1 = \Psi_2} + (\Phi(\Psi_1) = \Phi(\Psi_2)) \quad (4.1)$$

или

$$\Psi_1 = \Psi_2 \Rightarrow \Phi(\Psi_1) = \Phi(\Psi_2), \quad (4.2)$$

где $\Phi(A^0)$, Ψ_1 , Ψ_2 – произвольные формулы и A^0 входит в $\Phi(A^0)$ однократно. Доказательство (4.1) осуществляется аналогично (3.11) через доказательство вспомогательной формулы

$$\overline{A = B} + (\Phi(A) = \Phi(B)) \quad (4.3)$$

с помощью правила 1.

Если формулы Ψ_1, Ψ_2 в (3.13), (3.14) содержат свободные переменные, то, как оговорено выше, они не должны попадать под действие квантора \forall или \exists , связывающего в Φ одноимённую переменную со свободной переменной в Ψ_1 или Ψ_2 . Мы, однако, еще усилим правило (4.2), допустив, что свободная переменная в Ψ_1, Ψ_2 может попадать под действие квантора в Φ . Справедливость этого утверждения понятна: $\Psi_1 = \Psi_2$ означает полное тождество для всех значений свободных переменных в Ψ_1, Ψ_2 (в отличие от дедуктивной эквивалентности $\Psi_1 \Leftrightarrow \Psi_2$). Поэтому при действии квантора на свободную переменную в Φ безразлично, Ψ_1 или Ψ_2 подставлено в Φ .

Попутно проиллюстрируем на простом примере, что в рамках правила 4.1 нельзя, в общем случае, подставлять в Φ вместо предиката A формулу Ψ , содержащую свободную переменную, попадающую под действие квантора в Φ :

$$\vdash \quad \exists B \forall C ((A = B) + C \cdot \bar{C}) \quad (4.4)$$

Подставим вместо свободной переменной A формулу $A = C$ так, что свободная переменная C оказывается в (4.4) под действием квантора $\forall C$, получаем ложную формулу.

Для доказательства правила (4.2) в расширенной формулировке докажем ряд вспомогательных формул.

$$\overline{A(x) + B(x)} + \exists y A(y) + B(x) \quad (4.5)$$

доказывается с помощью (3.14) и $\overline{\bar{A} + B} + B = \bar{A} + B$. Отсюда правило вывода:

$$\Phi(x) + \Psi(x) \Rightarrow \exists y \Phi(y) + \Psi(x), \quad (4.6)$$

означающее, что слагаемое в сумме можно связать квантором существования. Отличие от правила вывода 3 состоит в том, что при связывании квантором всеобщности второе слагаемое не должно зависеть от x , и следование (4.6) является односторонним.

В формуле

$$\overline{\forall x (\overline{A(x)} + B(x))} + \overline{A(z)} + B(z), \quad (4.7)$$

полученной из (3.13) слагаемое $\overline{A(z)}$ связываем квантором \exists , а слагаемое $B(z)$ – квантором \forall :

$$\overline{\forall x (\overline{A(x)} + B(x))} + \overline{\forall y A(y)} + \forall z B(z). \quad (4.8)$$

Аналогично доказывается

$$\overline{\forall A (\overline{\Phi(A^n)} + \Psi(A^n))} + \overline{\forall B \Phi(B^n)} + \forall C \Psi(C^n) \quad (4.9)$$

с помощью аналогов формул (3.13) (3.14).

$$\overline{\forall A \Phi(A^n)} + \Phi(B^n) \quad (4.10)$$

$$\overline{\Phi(A^n)} + \exists B \Phi(B^n) \quad (4.11)$$

для произвольных $\Phi(A^n)$, $\Psi(A^n)$.

Формулы (4.8), (4.9) дают нам правила вывода

$$\overline{\Phi(x)} + \Psi(x) \Rightarrow \overline{\forall y \Phi(y)} + \forall z \Psi(z) \quad (4.12)$$

$$\text{и} \quad \overline{\Phi(A^n)} + \Psi(A^n) \Rightarrow \overline{\forall B \Phi(B^n)} + \forall C \Psi(C^n) \quad (4.13)$$

Обратное следование, разумеется, неверно.

С помощью формулы (4.8) выводимо аналогичное соотношение для эквивалентности:

$$\overline{\forall x(A(x) = B(x))} + (\forall y A(y) = \forall z B(z)). \quad (4.14)$$

Для доказательства (4.14) необходимо представить эквивалентности как произведения импликаций и воспользоваться дистрибутивностью операции сложения относительно умножения: $A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$.

Из формулы (4.14) следует правило вывода:

$$\Phi(x) = \Psi(x) \Rightarrow \forall y \Phi(y) = \forall z \Psi(z). \quad (4.15)$$

Аналогичная формула и правило вывода доказываются для предикатной переменной:

$$\overline{\forall A(\Phi(A^n) = \Psi(A^n))} + (\forall B \Phi(B^n) = \forall C \Psi(C^n)), \quad (4.16)$$

$$\Phi(A^n) = \Psi(A^n) \Rightarrow \forall B \Phi(B^n) = \forall C \Psi(C^n). \quad (4.17)$$

Справедливы и аналоги формул (4.8), (4.9), (4.14), (4.16), содержащие вместо кванторов всеобщности кванторы существования:

$$\overline{\forall x(\overline{\Phi(x)} + \Psi(x))} + \overline{\exists y \Phi(y)} + \exists z \Psi(z) \quad (4.18)$$

$$\overline{\forall A(\overline{\Phi(A)} + \Psi(A))} + \overline{\exists B \Phi(B)} + \exists C \Psi(C) \quad (4.19)$$

$$\overline{\forall x(\Phi(x) + \Psi(x))} + (\exists y \Phi(x) = \exists z \Psi(z)) \quad (4.20)$$

$$\overline{\forall A(\Phi(A) + \Psi(A))} + (\exists B \Phi(B) = \exists C \Psi(C)) \quad (4.21)$$

Формулы (4.18), (4.19) выводятся на основании определения квантора \exists . Формулы (4.20), (4.21) доказываются отрицанием обеих частей равенств в (4.14), (4.16). Справедливы также и аналоги правил вывода (4.12), (4.13), (4.15), (4.17) с заменой кванторов \forall на \exists .

Теперь мы можем доказать по индукции правило (4.2) в расширенном варианте. Действительно, равенство $\Psi_1 = \Psi_2$ может быть превращено в $\Phi(\Psi_1) = \Phi(\Psi_2)$ пошаговым применением следующих операций.

1. Отрицание: $\Psi_1 = \Psi_2 \Rightarrow \overline{\Psi_1} = \overline{\Psi_2}$
2. Сложение: $\Psi_1 = \Psi_2 \Rightarrow \Psi_1 + \Psi = \Psi_2 + \Psi$
3. Связывание квантором:

$$\Psi_1(x) = \Psi_2(x) \Rightarrow \forall y \Psi_1(y) = \forall z \Psi_2(z),$$

$$\Psi_1(A^n) = \Psi_2(A^n) \Rightarrow \forall B \Psi_1(B^n) = \forall C \Psi_2(C^n).$$

Из справедливости данных правил следует (4.2).

Импликация (4.1), в отличие от правила (4.2), требует некоторой модификации, а именно,

$$\overline{\forall A, x (\Psi_1(A, x) = \Psi_2(A, x))} + (\Phi(\Psi_1) = \Phi(\Psi_2)), \quad (4.22)$$

Где A, x – переменные, входящие в Ψ_1, Ψ_2 и связанные в Φ , $A = (A_1, \dots, A_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Вывод (4.22) проще всего пояснить на конкретном примере.

$$\text{Пусть } \Psi_1 = C(x) \cdot \bar{B} + B, \quad \Psi_2 = C(x) + B,$$

$$\Phi = \forall C \forall x (A^0 + C(x)).$$

Тогда пошаговый переход от $\Psi_1 = \Psi_2$ к $\Phi(\Psi_1) = \Phi(\Psi_2)$ имеет вид:

$$\overline{C(x) \cdot \bar{B} + B = C(x) + B + C(x)} \\ (C(x) \cdot \bar{B} + B + C(x) = C(x) + B + C(x)), \quad (4.23)$$

$$\overline{\forall x(C(x)\bar{B} + B + C(x) = C(x) + \bar{B} + C(x))} \\ + \forall y(C(y) \cdot \bar{B} + B + C(y)) = \forall z(C(z) + B + C(z)), \quad (4.24)$$

$$\overline{\forall C(\forall y C(y)\bar{B} + B + C(y)) = \forall z(C(z) + B + C(z))} + \quad (4.25)$$

$$\forall C_1 \forall y_1 (C_1(y_1)\bar{B} + B + C_1(y_1)) = \forall C_2 \forall z_1 (C_2(z_1) + B + C_2(z_1))$$

Прежде чем воспользоваться свойством транзитивности импликации мы должны связать условие и заключение в (4.24) квантором $\forall C$, а в (4.23) – кванторами $\forall C \forall x$ в соответствии с (4.12), (4.13):

$$\overline{\forall C \forall x(C(x) \bar{B} + B = C(x) + B)} + (\forall C_1 \forall y_1 C_1(y_1)\bar{B} + B + C_1(y_1)) = \forall C_2 \forall z_1 (C_2(z_1) + B + C_2(z_1)). \quad (4.26)$$

Может случиться так, что в исходном равенстве в (4.14), (4.16), (4.20), (4.21) от переменной x или A зависит только одна часть равенства. В этом случае для второй части равенства соответствующий квантор просто отпускается.

Отметим также, что требования однократности вхождения A^0 в Φ не умаляет общности правила эквивалентной замены, поскольку при нескольких вхождениях A^0 в Φ мы можем осуществлять пошаговую замену Ψ_1 на Ψ_2 в Φ , причём можем по своему усмотрению сделать замену только в части вхождений A^0 . Для сравнения, правило подстановки 4.1 требует

замены по всем вхождениям переменной. Кроме того формула $\Psi_1(A, x)$ может входить в Φ несколько раз, причём с разными свободными переменными A, x в разных вхождениях, а также с разными связанными переменными кванторами из Φ . В этом случае правило эквивалентной замены оказалось бы весьма громоздким, однако возможность пошаговой замены с однократным вхождением Ψ_1 снимает все трудности.

Правила вывода 2, 4.2 являются просто частными случаями общего правила эквивалентной замены. При этом происходит их усиление: при подстановке Ψ в формулу свободные переменные из Ψ могут оказываться под действием кванторов в Φ (в этом случае мы считаем, что A^0 входит однократно в Φ).

Правило эквивалентной замены является основным средством вывода в I^Z . Оно позволяет тождественными преобразованиями через цепочку эквивалентностей привести исследуемую формулу к той или иной канонической форме и, по возможности, непосредственно к константе U или \bar{U} . В то же время, правило модус поненс, являющееся основным инструментом вывода в ряде формализмов, менее удобно, поскольку является односторонним и может быть применено только к уже доказанным формулам. Иными словами, в этом случае мы должны идти от конца к началу дедуктивной цепочки и должны уметь априори предвидеть конечные шаги.

Отметим еще, что правило подстановки 4.1 требует зависимости $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ от всех переменных. Однако это требование можно снять и считать допустимым зависимость Ψ только от части переменных при подстановке вместо предиката $A(x_1, \dots, x_n)$. Если при этом оказывается, что связанная переменная в Φ исчезает в результате подстановки, то соответствующий квантор также выбрасывается. Доказательство

данной модификации состоит в следующем: отсутствующую переменную x_i возвращаем в Ψ в виде слагаемого $B(x_i) \cdot \overline{B(x_i)}$, осуществляем подстановку, а затем уничтожаем с помощью правила эквивалентной замены.

В доказуемой формуле можно осуществлять переименование свободных переменных: $\Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$, $\Phi(A) \Rightarrow \Phi(B)$, однако, если переименование предиката является просто частным случаем подстановки, то переименование переменной x осуществляется связыванием квантором $\forall x$, переименованием связанной переменной x в y и снятием квантора $\forall y$. Однако, если переменная y также встречается в $\Phi(x)$ в качестве свободной, то указанная схема $\Phi(x,y) \Rightarrow \Phi(y,y)$ не работает, хотя само следование верно. В этом случае можно воспользоваться формулой

$$\overline{\forall x A(x,y)} + A(y,y),$$

которая выводится из

$$\overline{\forall x B(x)} + B(y)$$

подстановкой $B(t) \rightarrow B(t,y)$.

Следует также иметь в виду, что переименование свободных переменных, в отличие от связанных, дает разные формулы, т.е. нельзя записать $\Phi(x) = \Phi(y)$. Для сравнения: $\int f(x)dx = \int f(y)dy$, но неверно $f(x) = f(y)$.

§ 5. Нормальная форма

Выше были приведены базовые эквивалентности для бескванторных формул. Дополним этот список основными формулами, содержащими кванторы.

$$\forall x(A(x) + B) = \forall xA(x) + B, \quad \exists x(A(x) \cdot B) = \exists xA(x) \cdot B, \quad (5.1)$$

$$\forall x(A(x) \cdot B) = \forall xA(x) \cdot B, \quad \exists x(A(x) + B) = \exists xA(x) + B, \quad (5.2)$$

$$\forall x(A(x) \cdot B(x)) = \forall x_1A(x_1) \cdot \forall x_2B(x_2),$$

$$\exists x(A(x) + B(x)) = \exists x_1A(x_1) + B(x_i), \quad (5.3)$$

$$\forall x\forall y A(x, y) = \forall y\forall xA(x, y), \quad \exists x\exists y A(x, y) = \exists y\exists xA(x, y), \quad (5.4)$$

вывод которых не представляет труда.

Отметим, что каждой эквивалентности соответствует дуальная эквивалентность с заменой $\forall \leftrightarrow \exists$, операции сложения на операцию умножения и наоборот. Дуальное правило следует из определения квантора существования и тождества

$$(A = B) = (\bar{A} = \bar{B})$$

Формулы, аналогичные (5.1) – (5.4), справедливы и для предикатных переменных:

$$\forall A(\Phi(A) + \Psi) = \forall A\Phi(A) + \Psi,$$

$$\exists A(\Phi(A) \cdot \Psi) = \exists A\Phi(A) \cdot \Psi, \quad (5.5)$$

$$\forall A(\Phi(A) \cdot \Psi) = \forall A\Phi(A) \cdot \Psi,$$

$$\exists A(\Phi(A) + \Psi) = \exists A\Phi(A) + \Psi, \quad (5.6)$$

$$\forall A(\Phi(A) \cdot \Psi(A)) = \forall A_1 \Phi(A_1) \cdot \forall A_2 \Psi(A_2),$$

$$\exists A(\Phi(A) + \Psi(A)) = \exists A_1 \Phi(A_1) + \exists A_2 \Psi(A_2) \quad (5.7)$$

$$\forall A \forall B \Phi(A, B) = \forall B \forall A \Phi(A, B),$$

$$\exists A \exists B \Phi(A, B) = \exists B \exists A \Phi(A, B), \quad (5.8)$$

поскольку правила вывода 3.1 и 3.2 аналогичны.

$$\forall x \forall A \Phi(A, x) = \forall A \forall x \Phi(A, x),$$

$$\exists x \exists A \Phi(A, x) = \exists A \exists x \Phi(A, x). \quad (5.9)$$

Формулы (5.1) – (5.3), (5.5) – (5.7), (2.3), (2.4) позволяют тождественными преобразованиями вынести все кванторы, находящиеся внутри некоторой формулы Φ , в общую кванторную строку перед остальной, бескванторной частью формулы.

Далее для краткости будет обозначать $\forall x \Phi(x)$ формулу $\forall x_1 \forall x_2, \dots \forall x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$, где x_1, \dots, x_n – произвольный набор предметных переменных. Аналогично введём обозначения $\exists x \Phi(x)$ для $\exists x_1, \dots, \exists x_n \Phi(x_1, \dots, x_n)$, $\forall A \Phi(A)$ для $\forall A_1, \dots, \forall A_n \Phi(A_1, \dots, A_n)$, $\exists A \Phi(A)$ для $\exists A_1, \dots, \exists A_n \Phi(A_1, \dots, A_n)$. Кроме того будем записывать $Qx \Phi(x)$ для некоторого набора кванторов $\forall x; \exists x$; с произвольным чередованием. При этом, например, запись $QA, x \Phi(A, x)$ означает наличие произвольного чередования переменных A_i , и x_i с разными кванторами, а в формуле $QAQx \Phi(A, x)$ сначала идут предикаты A_1, \dots, A_n связанные некоторыми кванторами, а затем предметные переменные x_1, x_2, \dots, x_m .

Таким образом, произвольную формулу можно переписать в виде:

$$\Phi = QA, x \Phi(A, x), \quad (5.10)$$

где $\Phi(A, x)$ – бескванторная формула. Указанная запись носит название нормальной формы для Φ .

Теорема 1. Произвольная замкнутая формула Φ исчисления I^Z может быть приведена к эквивалентной замкнутой формуле вида:

$$\Phi = QA(\forall x \Phi_1(A, x) + \exists y \Phi_2(A, y)), \quad (5.11)$$

а также:

$$\Phi = QA(\forall x \Phi_1(A, x) \cdot \exists y \Phi_2(A, y)), \quad (5.12)$$

где Φ_1, Φ_2 - бескванторные формулы.

В формуле

$$\forall x B(x) = \forall A(\exists y B(y) \cdot \overline{A(y)}) + \forall z A(z)), \quad (5.13)$$

Импликация слева направо доказывается связыванием квантором $\forall A$ предиката $A(x)$ в (4.8) после переименования $A \rightsquigarrow B$. Обратная импликация для (5.13) следует из формулы (4.10):

$$\overline{\forall A(\exists y(B(y) \cdot \overline{A(y)}) + \forall z A(z))} + \exists p(B(p) \cdot \overline{A_1(p)}) + \forall q A_1(q) \quad (5.14)$$

подстановкой $A_1(p) \rightarrow B(p)$.

Эквивалентность (5.13) может быть обобщена на случай нескольких переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\forall x B(x) = \forall A(\exists y(B(y) \cdot \overline{A(y)}) + \forall z A(z)), \quad (5.15)$$

а также на случай, когда имеются дополнительные кванторы существования $\exists t, t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$:

$$\exists t \forall x B(t, x) = \forall A \exists p (\exists y (B(p, y) \cdot \overline{A(p, y)}) + \forall z A(p, z)). \quad (5.16)$$

Следует также иметь в виду эквивалентности, полученные отрицанием левой и правой частей (5.15), (5.16):

$$\forall t \exists x B(t, x) = \exists A \forall p (\forall y (B(p, y) + \overline{A(p, y)}) \cdot \exists z A(p, z)). \quad (5.17)$$

Обращаясь к формуле (5.10), прежде всего, построим эквивалентную ей в форме

$$\Phi = QAQx\Phi(A, x), \quad (5.18)$$

где все предикатные кванторы идут раньше кванторов предметных переменных.

Пусть, идя слева направо по кванторной строке QA, x (5.10), мы встретили предметную переменную, правее которой есть предикатный квантор. Для определенности положим $\exists A_1$. Если перед $\exists A_1$ все предметные переменные (их может быть несколько) связаны квантором существования, то мы просто переносим $\exists A_1$ левее всех кванторов, связывающих предметные переменные.

Пусть в общем случае кванторная строка из предметных переменных перед $\exists A_1$ имеет вид $\exists x \forall y Qz$, где наборы x и z могут быть пустыми, а вся формула (5.10) в целом может быть представлена в виде

$$QC \exists x \forall y Qz \exists A_1 QD, r \Phi(C, A_1, D, x, y, z, r). \quad (5.19)$$

Применим (5.16) к (5.19), положив

$$\exists t \forall x B(t, x) \rightarrow \exists x \forall y Qz \exists A_1 QD, r \Phi(C, A_1, D, x, y, z, r).$$

Тогда (5.19) запишется в виде эквивалентной формулы

$$Q C \forall A \exists x, y Q z \exists A_1 Q D, r \left(\Phi(C, A_1, D, x, y, z, r) \cdot \overline{A(x, y)} + A(x, t) \right). \quad (5.20)$$

Таким образом, мы уменьшили число блоков предметных переменных, связанных квантором всеобщности в кванторной подстроке $\exists x \forall y Q z$ на единицу. Повторяя данную процедуру требуемое число раз, приводим (5.10) к (5.18).

С помощью описанной процедуры можно преобразовать произвольную замкнутую формулу I^1 вида $Q x \Phi(C, x)$ с использованием (5.16) к форме

$$\Phi = \forall B \exists x \forall y \Phi(C, B, x, y), \quad (5.21)$$

а также, с учетом (5.17),

$$\Phi = \exists B \forall x \exists y \Phi(C, B, x, y). \quad (5.22)$$

Окончательно, применяя (5.15) к (5.22), получаем (5.11). Аналогично (5.21) приводится к (5.12) с учетом (5.17), что доказывает теорему.

Произвольная замкнутая формула I^1 может быть приведена к эквивалентной ей формуле вида (5.21). После снятия кванторов всеобщности $\forall B$ получаем дедуктивно эквивалентную исходной формуле I^1 и (5.21) формулу

$$\exists x \forall y \Phi(C, B, x, y). \quad (5.23)$$

Последнее обстоятельство дедуктивной эквивалентности (5.21) и (5.23) следует подчеркнуть особо, т.к. в рамках доказательства теоремы 1 использовались только эквивалентные

преобразования. Формула вида (5.23) носит название нормальной формы Сколема. Соответственно выражения вида (5.11), (5.12) будем называть обобщенной нормальной формой Сколема (ОНФС). Теорема 1 устанавливает возможность приведения произвольной замкнутой формулы I^Z к эквивалентной ей ОНФС.

Если кванторная строка QA в (5.11), (5.12) начинается с кванторов всеобщности, то эти кванторы для удобства рассмотрения будем отбрасывать (сохраняя дедуктивную эквивалентность).

Для дальнейшего анализа принципиальное значение имеет порядок ОНФС – число групп однородных кванторов в QA помимо свободных предикатов. Например, $\exists A_1, A_2 \forall B \exists C_1, C_2, C_3$ дает третий порядок. Кванторная строка QA должна начинаться с квантора существования. В частности, при отсутствии связанных предикатов ОНФС имеет нулевой порядок.

Нормальная форма Сколема (5.23) не является ОНФС, но после приведения к (5.12) QA состоит из одного квантора $\exists A^n$ ($A^n: A^n(x)$), т.е. ОНФС имеет 1-й порядок. Кроме того, все ОНФС нулевого порядка являются формулами I^1 .

Формулы (5.11), (5.12) допускают дальнейшее упрощение. В гл. 5 будет показано, что произвольная формула I^Z с некоторыми дополнительными условиями может быть представлена в виде

$$\exists A^1 \Phi^1(A^1, B^2),$$

где Φ^1 – замкнутая по всем предметным переменным формула I^1 , зависящая только от двух предикатов $A(x)$ и $B(x, y)$. Однако для этого предварительно потребуется более глубокое изучение свойств I^Z .

§6. Разрешимые частные случаи

Формулы (5.11), (5.12) нулевого порядка являются частным случаем более общей формулы

$$\Phi = \forall A, x \exists y \Phi(A, x, y). \quad (6.1)$$

Отличие (6.1) от произвольной формулы I^1 , записанной в нормальной форме Сколема (5.23), заключается в обратном порядке следования кванторов $\forall x$ и $\exists y$. Однако, в отличие от исчисления I^1 , теория, состоящая из формул вида (6.1) разрешима.

Для произвольного фиксированного множества M , конечного или бесконечного, истинна одна и только одна замкнутая формула: (6.1) или ее отрицание:

$$\bar{\Phi} = \exists A, x \forall y \overline{\Phi(A, x, y)} \quad (6.2)$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Покажем, что, если $\bar{\Phi}$ истинна на некотором множестве M , то она истинна и на множестве M_n , состоящем из n элементов. Пусть M - конечно, $|M| = k < n$ и A_1^0, \dots, A_m^0 - те предикаты, заданные на M , для которых реализуется (6.2). Доопределим предикаты A^0 на множестве M_n так, что каждый предикат сохраняет свое значение, если какая-либо переменная, входящая в этот предикат, принимает значения $x = e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ ($e_i \in M_n$). В этом случае (6.2) сохранит свою истинность и на M_n . Пусть $n < |M|$, M конечно или бесконечно. Тогда существует набор элементов $M_k = \{e_1, \dots, e_k\}$ ($k \leq n$) для некоторых предикатов A_1, \dots, A_m , и существуют значения $x_1, x_2, \dots, x_n \in M_k$ такие, что для всех $y \in M$ (6.2) истинно. Дополним множество M_k до множества M_n произвольными

элементами из M , если $k < n$. Тогда (6.2) будет истинно не только на M , но и на M_n , поскольку при уменьшении числа сомножителей в истинном логическом произведении его истинность сохраняется. Отсюда следует, что, если (6.1) истинно на множестве M_n , то оно истинно и на любом другом множестве M . Задача, таким образом, сводится к конечной проверке на M_n .

В свою очередь, формула (6.1) преобразованием (5.15) приводится к ОНФС (5.11) нулевого порядка.

Частным случаем (6.1) является формула

$$\Phi = \forall A \exists y \Phi(A, y). \quad (6.3)$$

Для установления ее истинности достаточно проверить истинность (6.3) на множестве из одного элемента. В этом случае все предикаты заменяются переменными высказываниями, и задача сводится к проверке истинности формулы исчисления высказываний.

Частным случаем (6.1) является также формула

$$\Phi = \forall A, x \Phi(A, x) \quad (6.4)$$

или дедуктивно эквивалентная ей бескванторная формула исчисления I^1 . Предикаты A_i , входящие в (6.4), могут содержать разные конфигурации входящих в них предметных переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Например, $A_1(x_1, x_2)$, $A_1(x_2, x_1)$, $A_1(x_3, x_3)$, $A_1(x_3, x_2)$. Нетрудно построить такие двухместные предикаты на M_n , что будут рассмотрены все 2^4 комбинации значений истинности для данных 4-х предикатов. Поэтому замена предиката A_1^2 на 4 переменных высказывания $A_{1,1}^0$, $A_{1,2}^0$, $A_{1,3}^0$, $A_{1,4}^0$ дает дедуктивно эквивалентную (6.4) формулу. Вопрос

истинности формулы (6.4) сводится, таким образом, опять к формуле исчисления высказываний.

Разрешима также теория, содержащая все формулы вида (6.2). Из доказанного выше следует, что, если (6.2) истинно на некотором множестве M , то оно истинно и на любом другом множестве, содержащем M . Поэтому для истинности (6.2) необходимо и достаточно установить ее истинность на множестве из одного элемента. Иначе вопрос сводится к установлению истинности формулы $\exists A \Phi(A^0)$, где все предикаты заменены переменными высказываниями

Если замкнутая формула I^z содержит переменное высказывание, то с помощью (3.6) и дуальной ей формулы

$$\exists A \Phi(A) = \Phi(U) + \Phi(\bar{U}) \quad (6.5)$$

эту переменную можно исключить. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что формулы (5.11), (5.12) не содержат переменных высказываний. Константа U также может быть исключена. В частности, если замкнутая формула содержит только переменные высказывания и константу U , то через цепочку эквивалентностей она может быть приведена к U или \bar{U} .

Рассмотрим, наконец, случай, когда формула (5.18) содержит только одноместные предикаты $A^1 = (A_1^1, A_2^1, \dots, A_m^1)$:

$$\Phi = \varrho A^1 \varrho x \Phi(A^1, x) \quad (6.6)$$

Построим разрешающую процедуру для данной теории. Обозначим через Φ^n значение истинности (6.6) на множестве M_n из n элементов. Главное свойство формул вида (6.6) состоит в том, что значение истинности $\Phi^{|M|}$ на любом множестве M ,

конечном или бесконечном, при $|M| > 2^m$ совпадает с значением истинности Φ^n , $n = 2^m$. Докажем это утверждение по индукции параллельно с вычислением $\Phi^{|M|}$.

При $m=1$ предикат $A_1^1(x)$ на любом множестве M , $|M| > 1$ является либо константой U, \bar{U} , либо переменным высказыванием: $A_1^1(x_1) \rightarrow B_1, A_1^1(x_2) \rightarrow B_2, \dots$ В зависимости от квантора, связывающего A_1^1 , результат равен сумме или произведению указанных трех формул.

Пусть $m > 1$. Исключим из (6.6) предикат $A_1^1(x)$ Возможны варианты: $A_1^1(x)$ ложно всюду, $A_1^1(x)$ истинно только на одном элементе M , $A_1^1(x)$ истинно на двух элементах M и т.д. Соответствующие значения $\Phi^{|M|}$ таковы. В первом случае A_1^1 заменяется в $\Phi^{|M|}$ константой \bar{U} . Во втором случае имеем $\Phi_+^1 \cdot \Phi_-^{|M|-1}$, где Φ_+^1 - результат замены в Φ^1 предиката A_1^1 константой U , а $\Phi_-^{|M|-1}$ - результат замены в $\Phi^{|M|-1}$ предиката A_1^1 константой \bar{U} , и т.д. При этом, в силу индуктивного предположения, если $|M| - 1, |M| - 2, \dots$ больше 2^{m-1} (или бесконечно), то осуществляем замену $\Phi^{|M|-1}, \dots$ на Φ^p , $p = 2^{m-1}$. Таким образом, общее число вариантов равно $|M| + 1$, если $|M| < 2^m$, и $2^m + 1$, если $|M| \geq 2^m$. Если предикат $A_1^1(x)$ связан квантором существования, то $\Phi^{|M|}$ равно сумме всех вариантов, т.е. сумме произведений вида $\Phi_+^k \cdot \Phi_-^{|M|-k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, k_0$, $k_0 = \min(|M|, 2^m)$, Φ_+^0, Φ_-^0 полагаем равным U). Если же предикат $A_1^1(x)$ связан квантором всеобщности, то $\Phi^{|M|}$ равно произведению $k_0 + 1$ вариантов. Последовательным исключением всех предикатов получаем значение $\Phi^{|M|}$.

Наконец, значение Φ (6.6) равно произведению

$$\Phi = \Phi^1 \cdot \Phi^2 \cdot \dots \Phi^{2^m}, \quad (6.7)$$

где учтено, что все $\Phi^{|M|}$ имеют одинаковую истинность при $|M| \geq 2^m$.

Обратим внимание на существенное отличие рассмотренной задачи от аналогичной для случая исчисления предикатов 1-го порядка I^1 , соответствующему $QA^1 \rightarrow \forall A^1$ в (6.6). Если некоторая формула Φ исчисления I^1 истинна на множестве M (конечном или бесконечном), то она истинна и на любом его подмножестве $M_I, M_I \subset M$. Действительно, пусть произвольным образом заданы предикаты A_1, \dots, A_m формулы Φ на M_I . Выделим произвольный элемент $e_1 \in M_I$ и доопределим предикаты A_1, \dots, A_m до множества M тождественным образом на e_1 . Поскольку Φ истинна для любых предикатов на M , то она истинна и для построенных предикатов A_1, \dots, A_m .

Применяя это утверждение (справедливое для многоместных предикатов) к рассматриваемому случаю одноместных предикатов, заключаем, что в произведении (6.7) достаточно оставить только последний сомножитель, т.е. ограничиться случаем $|M| = 2^m$.

Доказанное свойство формул исчисления I^1 не распространяется на I^Z . Например, формула

$$\exists A, x, y \overline{A(x)} \cdot A(y) \quad (6.8)$$

истинна для $|M| > 1$ и ложна на множестве, состоящем из одного элемента $|M| = 1$.

Глава 2

Теории счётных множеств

§1. Расширение списка аксиом

Исчисление предикатов первого порядка I^1 даёт множество важных для дальнейших приложений формул, главная особенность которых – истинность сразу на всех множествах M . Эта черта является одновременно и достоинством, и недостатком. Универсальность и высокая степень общности формул является их достоинством, а недостаток состоит в невозможности построить утверждения для конкретных ситуаций, когда зафиксировано определённое множество M с некоторыми константами, заданными предикатами, функциями и т.п. Поэтому при рассмотрении конкретных задач осуществляется расширение языковых средств I^1 и соответствующее пополнение списка аксиом. Характерным примером является задание множества натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ в качестве множества M с соответствующими константами (цифрами) $0, 1, 2, \dots$. На N задаются индивидуальные (фиксированные) предикаты, в том числе предикаты равенства и неравенства, а также функции, например, сложения и умножения.

При построении теорий на множествах высших мощностей возникает необходимость введения в язык I^1 предикатов, аргументами которых являются другие предикаты. Такие расширения I^1 носят название исчислений предикатов высших порядков.

Язык исчисления I^z отличается от языка I^1 единственным символом – квантором всеобщности для переменного предиката.

При этом правило связывания квантором предметной переменной аналогичным образом распространяется на переменные предикаты. Это, казалось бы, несущественное расширение языка меняет ситуацию радикальным образом. Все перечисленные выше дополнения к формализму I^1 оказываются излишними в случае I^Z . Целью дальнейшего изложения является описание процедур формализации в I^Z корректно сформулированных модельных теорий на множествах произвольных мощностей. При этом для вывода всех доказуемых утверждений в рамках соответствующих им аксиоматических теорий достаточно единственной аксиомы $A + B + \bar{B}$, т.е. нам не потребуется ни языковых, ни аксиоматических расширений I^Z .

Рассмотрим предварительно возможность дополнения списка аксиом I^1 без расширения языковых средств I^1 . По теореме Лёвенгейма [2, 6], если замкнутая формула I^1 выполнима на некотором бесконечном множестве, то она выполнима и на счётном. Иначе: если формула I^1 истинна на счётном множестве, то она истинна и на любом другом бесконечном множестве. Кроме того выше мы установили, что, если формула I^1 истинна на некотором множестве M , то она истинна и на любом его подмножестве. Отсюда следует, что формула I^1 истинна (на всех множествах) тогда и только тогда, когда она истинна на счётном множестве (или любом другом бесконечном множестве). Пусть некоторая формула Ψ исчисления I^1 выбрана нами в качестве аксиомы. Если Ψ истинна на счётном множестве, то в силу теоремы Гёделя о полноте она доказуема в I^1 , и добавление её в список аксиом ничего не даёт. Пусть Ψ истинна на некотором конечном множестве, но не на счётном. Тогда она истинна и на всех конечных множествах с меньшим числом элементов. Случай, когда Ψ не является истинной ни на одном конечном

множестве, мы отбрасываем, т.к. такая аксиома делает исчисление противоречивым.

$$\text{Действительно, формулы } \Psi_n(A, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \overline{A(x_{n+1})} + A(x_1) + A(x_2) + \dots + A(x_n) \quad (1.1)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) истинны на всех конечных множествах M_k , $1 \leq k \leq n$ и ложны на всех остальных. Они означают, что элемент x_{n+1} обязательно совпадёт с одним из элементов x_1, \dots, x_n для любого предиката $A(x)$.

Кроме того, формула

$$\Psi_c = \exists x, y, z (A(x, x) + A(x, y) \cdot A(y, z) \cdot \overline{A(x, z)} + \forall p \overline{A(x, p)}) \quad (1.2)$$

истинна на всех конечных множествах и ложна на любом бесконечном. Чтобы понять смысл (1.2) рассмотрим её отрицание $\overline{\forall A \Psi_c}$, которое означает следующее. Существует предикат $A(x, y)$, удовлетворяющий отношениям порядка: $\overline{A(x, x)}$ и, если $A(x, y), A(y, z)$ то $A(x, z)$ для произвольных x, y, z . У этого предиката для любого элемента x есть последующий p : $\exists p A(x, p)$. Указанные требования выполнимы на N , но невыполнимы на любом конечном множестве.

Пусть аксиоматика I^1 дополнена парой формул Ψ_n, Ψ_m ($n < m$) или Ψ_n, Ψ_c . Если множество M содержит не более n элементов, то формулы Ψ_m и Ψ_c будут истинны на M автоматически, и потребность в аксиомах Ψ_m и Ψ_c отпадает. Таким образом, мы можем дополнить I^1 не более чем одной аксиомой Ψ_n и Ψ_c . При этом невозможно даже выделить и зафиксировать единственное конечное множество, за исключением случая $n = 1$:

$$\overline{A(x)} + A(y), \quad (1.3)$$

когда исчисление I^1 вырождается в исчисление высказываний. Тем более, невозможно аксиоматически задать какие-либо константы или индивидуальные предикаты в рамках языковых средств I^1 .

Ситуация резко меняется с переходом от I^1 к I^Z . Формула

$$\frac{\Gamma_n = \Psi_n \cdot \exists A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, x_1, \dots, x_n (\overline{\Psi_1(A_1, x_1, x_2)}) \cdot \overline{\Psi_2(A_2, x_1, x_2, x_3)} \cdot \dots \cdot \overline{\Psi_{n-1}(A_{n-1}, x_1, \dots, x_n)}}{(1.4)}$$

истинна на множестве M_n из n элементов и ложна на любом другом. Действительно, выполнимость $A_1(x_2) \cdot \overline{A_1(x_1)}$ означает, что существует элемент x_2 , отличный от x_1 . Выполнимость $A_2(x_3) \cdot \overline{A_2(x_1)} \cdot \overline{A_2(x_2)}$ означает существование элемента x_3 , отличного от x_1, x_2 , и т.д. В целом, второй сомножитель (1.4) истинен на всех множествах, содержащих n элементов и более, а Ψ_n – на множествах, содержащих n элементов и менее. Таким образом Γ_n , можно выбрать в качестве аксиомы, фиксирующей единственное множество M_n .

Пусть Ψ – некоторая аксиома, дополняющая аксиому $A + B + \bar{B}$ формализма I^Z , и Φ – формула I^Z , доказанная с участием Ψ . Тогда $\overline{\Psi^Z} + \Phi$ – доказуемая в I^Z формула (без аксиомы Ψ), где Ψ^Z – замкнутая по всем переменным (предметным и предикатам) кванторами \forall формула Ψ .

Действительно, $\overline{\Psi^Z} + \Psi$ – доказуемо. Если к доказуемой формуле Φ применить какое – либо правило вывода и получить Φ_1 , то его можно применить и к $\overline{\Psi^Z} + \Phi$ с доказательством $\overline{\Psi^Z} + \Phi_1$. Это следует из того, что Ψ^Z полностью замкнута, и правила подстановки и связывания квантором не затрагивают

Ψ^Z . Таким образом, у нас нет необходимости дополнять формализм I^Z какими – либо аксиомами. Достаточно просто рассмотреть множество формул вида $\overline{\Psi^Z} + \Phi$. Подчеркнём при этом еще раз принципиальную значимость сохранения формализма I^Z неизменным: только так мы можем сохранить все доказанные ранее метатеоремы.

Сформированное выше утверждение о $\overline{\Psi^Z} + \Phi$ является теоремой дедукции применительно к I^Z , однако по сравнению с формализмом I^1 имеется принципиальное различие. По теореме дедукции для I^1 имеем: если из формулы Ψ может быть выведена формула Φ , то доказуемо $\overline{\Psi} + \Phi$. Однако при таком выводе нельзя использовать правила связывания кванторами переменных, входящих в Φ , если они входят в Ψ , а также осуществлять подстановки в Φ по переменным и предикатам, входящим в Ψ . В рассматриваемом нами случае таких ограничений нет ввиду замкнутости Ψ^Z . Подчеркнем, что в I^1 формула Ψ не может рассматриваться как аксиома, расширяющая формализм.

§2. Условие счётности

Запишем условие, определяющее множество $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ чисел натурального ряда. В то время как для условия Γ_n , определяющего конечное множество $|M| = n$ достаточно было использование одноместных предикатов, формулировка аналогичного условия счётности потребует многоместных предикатов, т.к. одноместные «не различают» большие конечные и бесконечные множества. Оказывается, для этого достаточно одного двухместного и одного одноместного предиката.

Определим предикат $D(x, y)$, имеющий содержательный смысл операции сложения с единицей $x + 1 = y$, соотношениями:

$$\Psi_0(x_0) = \forall x \overline{D(x, x_0)}, \quad (2.1)$$

$$\Psi_{\epsilon} = \forall x \exists y D(x, y), \quad (2.2)$$

$$\Psi_+ = \forall A, x, y, z \left(\overline{D(x, y) \cdot D(x, z) \cdot A(y)} + A(z) \right), \quad (2.3)$$

$$\Psi_- = \forall A, x, y, z \left(\overline{D(y, x) \cdot D(z, x) \cdot A(y)} + A(z) \right), \quad (2.4)$$

$$\Psi_i(x_0) = \forall A, y \left(\overline{A(x_0)} + \exists t, t_1 (D(t, t_1) \cdot A(t) \cdot \overline{A(t_1)}) + A(y) \right) \quad (2.5)$$

Покажем, что формулы (2.1) – (2.5) однозначно определяют предикат $D(x, y)$ (с точностью до изоморфизмов) на множестве \mathbf{N} и не могут быть выполнены ни на каком другом множестве.

Будем называть элемент x в $D(x, y)$ предшествующим, а y - последующим. Условие (2.1) означает, что существует элемент x_0 ($x_0 \sim 0$), у которого нет предшествующего. Наоборот, (2.2) означает, что у любого элемента есть последующий, а (2.3) – что такой элемент единственен. Действительно, если есть 2 разных элемента y и z , удовлетворяющих $D(x, y)$ и $D(x, z)$, то существует предикат $A(t)$, истинный для y и ложный для z , откуда $\Psi_+ = \bar{U}$.

Формула (2.4) устанавливает, что предшествующий элемент, если он существует, то единственен. В совокупности это означает, что у элемента x_0 есть бесконечная последовательность элементов, в которой каждый последующий однозначно

определяется предшествующим. При этом невозможно заикливание, т.е. ситуация, когда последующий элемент y_+ оказывается одним из предшествующих, т.к. у этого элемента будет 2 предшествующих, а если y_+ совпадёт с x_0 , то у x_0 окажется предшествующий в противоречие с (2.1). Эта последовательность может быть отождествлена с натуральным рядом 0, 1, 2,... Однако (2.1) - (2.4) ещё не решают проблемы, т.к. могут существовать и другие элементы, не входящие в указанную цепочку, причём множество, удовлетворяющее (2.1) – (2.4) может иметь произвольную мощность.

Аксиома индукции (2.5) устанавливает, что никаких других элементов, кроме цепочки 0, 1, 2... множество M не содержит. Действительно, (2.5) означает, что, если предикат $A(x)$ истинен для $x = x_0$ и если выполнен индуктивный шаг (для произвольных t если истинно $A(t)$, то истинно и $A(t_1)$ для последующего элемента) то $A(x)$ истинно для всех x . Предположим, что имеется еще некий элемент $y \in M$, не входящий в цепочку 0, 1, 2.... Тогда, положив $A(x)$ истинным для $x = 0, 1, 2 \dots$ и ложным для $x = y$, получаем $\Psi_i = \bar{U}$.

Обозначая

$$\Gamma(D, x_0) = \Psi_0 \cdot \Psi_{\epsilon} \cdot \Psi_+ \cdot \Psi_- \cdot \Psi_i, \quad (2.6)$$

получаем искомое условие счётности $\exists D, x_0 \Gamma(D, x_0)$.

Множество формул I^Z вида

$$\overline{\exists D, x_0 \Gamma(D, x_0)} + \Phi, \quad (2.7)$$

где Φ произвольная формула I^Z , можно трактовать следующим образом. Поскольку первое слагаемое (2.7) истинно для всех M , кроме $M = N$, то (2.7) истинно на всех множествах M тогда и

только тогда, когда Φ истинно на N . Доказуемость (2.7) означает истинность Φ на N .

Само по себе условие счётности ещё мало что даёт без участия констант и индивидных предикатов, однако при их определении возникает следующее затруднение. В формулировке (2.7) все элементы N равноправны. Поэтому, какое бы условие, определяющее некую константу, мы ни записали, этому условию будет удовлетворять и любой другой элемент N . Точно также индивидный предикат может быть определён только с точностью до изоморфизмов.

Пусть помимо условия счетности задан на N индивидный предикат, делающий все элементы N различными. Математически это означает следующее. Зададимся произвольным взаимно однозначным соответствием $\{0, 1, 2, \dots\} \leftrightarrow \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$, $N \leftrightarrow N_p$. Будем считать предикат $D(x, y)$ инвариантным относительно подстановки $N \leftrightarrow N_p$, если для произвольной пары x, y имеем $D(x, y) = D(x_p, y_p)$. Требование «различности» означает, что существует единственная инвариантная для $D(x, y)$ подстановка – тождественно равная самой себе. Такие предикаты далее будем называть дифференцирующими.

Нетрудно видеть, что предикат $D(x, y)$, заданный условиями (2.1) – (2.5), является дифференцирующим. Действительно, существует единственный элемент x_0 , у которого нет предшествующего, у элемента x_0 есть единственный последующий x_1 , у x_1 – единственный последующий x_2 и т.д. Напротив, если бы мы определили предикат $D_i(x, y)$ на множестве целых чисел как $x + 1 = y$ условиями, аналогичными (2.1) – (2.5), то такой предикат не был бы дифференцирующим.

Действительно, подстановка $x \rightarrow x_k = x + k$, $y \rightarrow y_k = y + k$ сохраняет равенство $x_k + 1 = y_k$.

Дифференцирующими являются также предикаты неравенства $x \leq y$, $x < y$, на \mathbf{N} , а предикат равенства $x = y$ таковым не является.

Пусть в общем случае формула $\Gamma_M(D)$ определяет множество \mathbf{M} и дифференцирующий предикат $D(x)$ на нём. Тогда произвольная константа на \mathbf{M} может быть задана условием, удовлетворяющим требованию

$$\overline{\Gamma_M(D)} + \exists x \Psi_a(D, x) \cdot \forall A, y, z \left(\overline{\Psi_a(D, x) \cdot \Psi_a(D, z) \cdot A(y)} + A(z) \right) \quad (2.8)$$

существования и единственности.

Определение индивидного предиката $C(y)$ условием $\Psi_C(D, C)$ должно удовлетворять требованию существования:

$$\overline{\Gamma_M(D)} + \exists C \Psi_C(D, C), \quad (2.9)$$

и единственности:

$$\overline{\Gamma_M(D)} + \overline{\Psi_C(D, C_1) \cdot \Psi_C(D, C_2)} + \forall y (C_1(y) = C_2(y)). \quad (2.10)$$

При этом Ψ_a , Ψ_C не должны содержать других свободных переменных, кроме D, x, C .

В дальнейшем следует иметь в виду тождество

$$\overline{\exists A \Phi(A)} + \overline{\Phi(A_1)} = \overline{\Phi(A_1)}. \quad (2.11)$$

Например, если задано множество \mathbf{N} условием $\exists D, x_0 \Gamma(D, x_0)$ и дифференцирующий предикат $D(x, y)$ на нём условием $\exists x_0 \Gamma(D, x_0)$, то достаточно только одно последнее условие.

Рассмотрим множество формул вида

$$\overline{\exists D, x_0 \Gamma(D, x_0)} + \Phi^1, \quad (2.12)$$

где Φ^1 - произвольная формула \mathbf{I}^1 . Поскольку Φ^1 истинна на произвольном множестве \mathbf{M} тогда и только тогда, когда она истинна на \mathbf{N} , то добавление условия счётности в (2.12) ничего не даёт, и (2.12) истинно тогда и только тогда, когда истинно Φ^1 .

Казалось бы, множество формул вида

$$\overline{\exists x_0 \Gamma(D, x_0)} + \Phi^1 \quad (2.13)$$

ничем особо не отличается от множества (2.12), только возможностью использования дифференцирующего предиката $D(x, y) \sim x + 1 = y$ в формуле Φ^1 . Однако эта дополнительная возможность приводит к разительным переменам. В форме (2.13) могут быть записаны все задачи математики на счётном множестве и континууме (за исключением некоторых, весьма экзотических, о которых будет оговорено особо). Представляется парадоксальным, что в (2.13) можно выразить, например, непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции, или функции с бесконечным числом точек разрыва, участвующие в системах уравнений с линейными и нелинейными операторами (в том числе и интегро-дифференциальными). Ведь даже если допустить, что такое вообще возможно в \mathbf{I}^2 , то для этого потребуется условие континуума, а не условие счётности с операцией сложения натурального числа с единицей. Тем не менее, главы 2, 3, 4 будут посвящены именно этому вопросу. Подчеркнём при этом, что формула (2.13) выходит за рамки

формулы I^1 наличием всего одного квантора существования, связывающего одноместный предикат.

§3. Константы натурального ряда.

Располагая дифференцирующим предикатом $D(x, y)$, мы можем записать условия, определяющие произвольную константу $0, 1, 2 \dots$. Они таковы:

$$\Psi_0(y_0) = \forall y \overline{D(y, y_0)}, \quad (3.1)$$

$$\Psi_1(y_1) = \exists y_0 \forall y \left(\overline{D(y, y_0)} \cdot D(y_0, y_1) \right), \quad (3.2)$$

$$\Psi_2(y_2) = \exists y_0 y_1 \forall y \left(\overline{D(y, y_0)} \cdot D(y_0, y_1) \cdot D(y_1, y_2) \right) \quad (3.3)$$

и т.д. Если единственность констант y_1, y_2, \dots устанавливается условием (2.3), то единственность ноля определением $\Gamma(D, x_0)$ не задана, а доказана лишь в содержательном смысле. Для полноты приведём формальное доказательство.

Предварительно выведем формулу

$$\exists x_0 \Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_0(y_0) = \Gamma(D, y_0), \quad (3.4)$$

устанавливающую, что два отдельных условия для $D(x, y)$, и ноля можно заменить одним $\Gamma(D, x_0)$, просто опустив квантор $\exists x_0$. Представим равенство (2.17) как произведение двух импликаций и докажем каждую по отдельности. Вывод импликации справа налево тривиален. После ряда простых преобразований получаем, что импликация слева направо будет доказана, если справедливо

$$\overline{\Gamma(D, x_0)} + A(x_0) + \overline{\Psi_0(y_0)} + \overline{A(y_0)}. \quad (3.5)$$

Применяя аксиому индукции (2.5), содержащуюся в $\Gamma(D, x_0)$, к предикату

$$B(t) = A(x_0) + \overline{\Psi_0(t)} + \overline{A(t)}, \quad (3.6)$$

имеем: $B(x_0) = U$. Индуктивный шаг $\overline{D(t, t_1)} + \overline{B(t)} + B(t_1)$

также выполнен, поскольку $\overline{D(t, t_1)} + \overline{\Psi_0(t_1)} = U$. Отсюда следует $\forall t B(t) = U$ и (3.4).

Условие единственности ноля имеем вид:

$$\overline{\exists x_0 \Gamma(D, x_0)} + \overline{\Psi_0(y_0)} + \overline{\Psi_0(z_0)} + \overline{A(z_0)} + A(y_0). \quad (3.7)$$

Объединяя по формуле (3.4) $\exists x_0 \Gamma(D, x_0)$ и $\Psi_0(y_0)$ в $\Gamma(D, y_0)$, с учетом (3.5) получаем требуемое условие (3.7).

Подстановка значения константы x_n вместо свободной переменной x в формулу $\Phi(x)$ может быть выполнена двумя эквивалентными способами:

$$\forall x_n (\overline{\Psi_n(x_n)} + \Phi(x_n)) \quad (3.8)$$

и

$$\exists x_n (\Psi_n(x_n) \cdot \Phi(x_n)). \quad (3.9)$$

Их равносильность вытекает из существования и единственности значения x , удовлетворяющего $\Psi_n(x_n)$.

Пусть некоторый предикат $\mathcal{F}(x, y)$, ($x = x_1, x_2, \dots, x_m$) удовлетворяет условиям существования и единственности y для всех x :

$$\exists y \mathcal{F}(x, y) \cdot \forall A, u, v \left(\overline{\mathcal{F}(x, u) \cdot \mathcal{F}(x, v) \cdot A(u)} + A(v) \right). \quad (3.10)$$

Такой предикат будем называть предикатом–функцией или просто функцией. Подстановка значения y в формулу $\Phi(t)$ осуществляется любым из двух эквивалентных способов

$$\forall y \left(\overline{\mathcal{F}(\bar{x}, y)} + \Phi(y) \right) = \exists y_1 \left(\mathcal{F}(\bar{x}, y_1) \cdot \Phi(y_1) \right) \quad (3.11)$$

Равенство (3.11) непосредственно следует из доказуемой в I^Z формулы:

$$\overline{\exists x B(x) \cdot \forall A, y, z \left(\overline{B(y) \cdot B(z) A(y)} + A(z) \right) + \left(\forall u \left(\overline{B(u)} + C(u) \right) = \right.} \\ \left. \exists v (B(v) \cdot C(v)) \right). \quad (3.12)$$

Справедливость (3.12) легко проверить, записав эквивалентность как произведение импликаций и доказав (3.12) по отдельности для каждой импликации.

Далее будем использовать обозначения $f(x) = y$ для функции $\mathcal{F}(x, y)$ (на уровне метаязыка), а подстановку $f(x) = y$ в формулу $\Phi(t)$ обозначать $\Phi(f(x))$.

Предикат $D(x, y)$ по определению (2.2), (2.3) является функцией. Далее будем обозначать операцию $x + 1 = y$ штрихом $x' = y$, а подстановку y в формулу $\Phi(t)$ как $\Phi(x')$, $\exists y (D(x, y) \cdot \Phi(y))$ соответствует $\Phi(x')$, $\exists y, z (D(x, y) \cdot D(y, z) \cdot \Phi(z))$ соответствует $\Phi(x'')$ и т.д.

Пусть $\vdash \Phi(x)$. Тогда подстановка любой функции или константы вместо свободной переменной x даёт истинную формулу в содержательном смысле. Это же легко доказывается формально с помощью доказуемой формулы I^Z :

$$\overline{\forall t \Phi(t)} + \overline{\exists z \mathcal{F}(x, z)} + \exists y(\mathcal{F}(x, y) \cdot \Phi(y)) \quad (3.13)$$

В доказуемую формулу $\Phi(t)$ свободная переменная t может входить несколько раз в составные части формулы $\Phi(t)$: $\Phi(\Phi_1(t) \dots \Phi_m(t))$ где $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots$ не обязательно доказуемые формулы, в частности, это могут быть просто предикаты содержащие t .

Осуществляя подстановку функции $\mathcal{F}(x, y)$ в $\Phi(t)$, мы можем воспользоваться левой или правой частью эквивалентности (3.11) и получить опять доказуемую формулу. Однако возникает вопрос о возможности связывания переменной t в $\Phi(t)$ одной из формул (3.11) «по частям» в каждой из формул $\Phi(t), \Phi_2(t) \dots$ Дело в том, что обозначение подстановки в форме $\Phi(f(x))$ ничего не говорит о том, где находится связывающая формула (3.11): перед всей формулой, перед её частями им непосредственно перед предикатом, содержащим t .

Докажем, что связывание любой (не обязательно доказуемой) формулы $\Phi(t)$ одной из подстановок (3.11) эквивалентно связыванию всех формул $\Phi_1(t) \dots \Phi_m(t)$ какой — либо подстановкой (3.11).

Поскольку произвольная формула I^z состоит из последовательного выполнения трёх логических операций: отрицания, сложения и связывания квантором всеобщности, то достаточно проверить выдвинутое утверждение для каждой из этих операций:

$$\exists y(\mathcal{F}(x, y) \cdot \overline{A(y)}) = \overline{\forall z(\overline{\mathcal{F}(x, z)} + A(z))}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \exists y(\mathcal{F}(x, y) \cdot (A(y) + B(y))) &= \exists y_1(\mathcal{F}(x, y_1) \cdot A(y_1)) + \\ &\exists y_2(\mathcal{F}(x, y_2) \cdot B(y_2)), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\exists y(\mathcal{F}(x, y) \cdot (A(y) + B)) = \exists y(\mathcal{F}(x, y) \cdot A(y)) + B, \quad (3.16)$$

$$\forall y(\overline{\mathcal{F}(x, y)} + \forall z A(y, z)) = \forall z \forall y(\overline{\mathcal{F}(x, y)} + A(y, z)). \quad (3.17)$$

Таким образом, при интерпретации формы $\Phi(f(x))$ мы можем размещать связывающую свободную переменную формулу (3.11) в любом месте внутри формулы $\Phi(y)$ при условии, что связанными окажутся все вхождения y в $\Phi(y)$.

§4. Предикат неравенства

Из всех индивидных предикатов, которые можно задать на N с условием $\Gamma(D, x_0)$, наибольшее значение для дальнейшего рассмотрения имеет предикат неравенства $x \leq y$, определяемый условием

$$\Psi_{\leq} = \forall x, y, y_1 \left((x_0 \leq x) \cdot \left(\overline{D(y, y_1)} + ((x \leq y) = \overline{(y_1 \leq x)}) \right) \right), \quad (4.1)$$

Хотя формально предикат $x \leq y$ является переменным, в содержательном смысле формуле (4.1) удовлетворяет только предикат неравенства. Действительно из (4.1) следует: $0 \leq x$ для всех x , $\overline{y \leq 0}$ для $y = 1, 2, 3 \dots$, $1 \leq x$ для $x = 1, 2, 3 \dots$, $\overline{y \leq 1}$ для $y = 2, 3, 4 \dots$ и т.д.

Выведем ряд полезных для дальнейшего формул, объединив условия $\Gamma(D, x_0)$ и Ψ_{\leq} . Предварительно отметим, что отношения $x < y$ и $x = y$ не требуют для себя отдельных предикатов, заданных условиями, аналогичными Ψ_{\leq} , поскольку допускают метаопределения. Будем полагать $x < y$ обозначением для

$$x < y \sim \overline{(y \leq x)} \quad (4.2)$$

а $x = y$ обозначением

$$x = y \sim (x \leq y) \cdot (y \leq x) \quad (4.3)$$

С учётом (4.2) условие (4.1) интерпретируется как

$$0 \leq x \text{ и } (x' \leq y) = (x < y). \quad (4.4)$$

Формула

$$\overline{\Gamma(D, x_0)} + (\forall x A(x) = A(x_0) \cdot \forall y A(y')) \quad (4.5)$$

означает, что $A(x)$ истинно для всех x тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно для $x = 0$ и для всех $x > 0$.

Импликация слева направо в (4.5) очевидна. Обратная импликация

$$\overline{A(x_0)} + \overline{\forall y A(y')} + \forall x A(x)$$

доказывается с учётом того, что в $\Gamma(D, x_0)$ в качестве сомножителя входит аксиома индукции (2.5), а также доказуемой формулы

$$\forall t (\overline{A(t)} + A(t')) + \overline{\forall y A(y')}. \quad (4.6)$$

Повторным применением доказуемой формулы

$$\overline{\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_{<}} + ((x \leq y) = (\overline{y' \leq x})) \quad (4.7)$$

с подстановкой $x \rightarrow y'$, $y \rightarrow x$ получаем:

$$\overline{\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_{<}} + ((x \leq y) = (x' \leq y')), \quad (4.8)$$

т.е. $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x' \leq y'$.

С помощью формул (4.5), (4.8) мы можем доказать важную для дальнейшего аксиому частичной индукции:

$$\Psi_I = \forall A, x, y \left(\overline{A(x)} + \exists t, t_1 (D(t, t_1) \cdot A(t) \cdot \overline{A(t_1)}) + \overline{x \leq y} + A(y) \right). \quad (4.9)$$

Её смысл состоит в следующем. Пусть $A(x)$ истинно при некотором фиксированном произвольном x и выполнено условие индуктивного шага. Тогда $A(y)$ истинно для всех y , удовлетворяющих $x \leq y$. Формула (4.9) отличается от (2.5) наличием переменной x вместо x_0 и дополнительным условием $x \leq y$. Хотя содержательный смысл (4.9) очевиден, необходимо формальное доказательство

$$\overline{\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_I} + \Psi_I, \quad (4.10)$$

которое осуществим индукцией по x с учётом наличия в $\Gamma(D, x_0)$ сомножителя Ψ_I . Снимая квантор \forall у переменной x в (4.9) и подставляя $x \rightarrow x_0$, получаем, что при $x = x_0$ (4.9) выполнено. Теперь нужно доказать справедливость индуктивного шага, т.е. истинность

$$\overline{B(x')} + \forall t \left(\overline{B(t)} + B(t') \right) + \forall z \left(\overline{x' \leq z} + B(z) \right), \quad (4.11)$$

если справедливо

$$\forall A \left(\overline{A(x)} + \forall p \left(\overline{A(p)} + A(p') \right) + \forall y \left(\overline{x \leq y} + A(y) \right) \right) \quad (4.12)$$

Снимая квантор всеобщности у предиката A , и подставляя $A(x) \rightarrow B(x')$, получаем, что (4.10) будет доказано, если из

условия

$$\overline{B(x')} + \overline{\forall p \left(\overline{B(p')} + B(p'') \right)} + \forall y (\overline{x \leq y} + B(y)) \quad (4.13)$$

следует (4.11). С учётом (4.5), (4.8) можно переписать

$$\forall z \left(\overline{x' \leq z} + B(z) \right) = \forall u \left(\overline{x' \leq u'} + B(u') \right) = \forall v \left(\overline{x \leq v} + B(v') \right),$$

а также с учётом

$$\overline{\forall t \left(\overline{B(t)} + B(t') \right)} + \overline{B(p')} + B(p'')$$

получаем требуемое утверждение (4.10).

Если в условии $\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_<$ заменить аксиому полной индукции (2.5) на аксиому частичной индукции (4.9), то условия $\Psi_0(x_0)$ (2.1), Ψ_+ (2.3), Ψ_- (2.4) можно опустить. Иначе:

$$\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_< = \Gamma_N, \quad (4.14)$$

где

$$\Gamma_N = \forall x \exists y D(x, y) \cdot \Psi_I \cdot \Psi_< \quad (4.15)$$

Это может показаться неожиданным, поскольку из определения предиката $D(x, y)$ (2.1) – (2.4) остался лишь один сомножитель Ψ_E (2.2), что явно недостаточно, однако предикат $D(x, y)$ фигурирует в Ψ_I и $\Psi_<$, и как мы сейчас докажем, условие (4.15) однозначно определяет $D(x, y)$ равным соответствующему предикату в (2.6).

Импликация слева направо (4.14) фактически уже доказана, поскольку доказана формула (4.10). Нам осталось вывести каждую из формул (2.1), (2.3), (2.4), используя условие Γ_N .

Определение ноля (2.1) доказывается подстановкой $x \rightarrow x_0$, $y_1 \rightarrow x_0$ в формулу

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{D(y, y_1)} + ((x \leq y) = \overline{(y_1 \leq x)}) \quad (4.16)$$

После чего последнее слагаемое в (4.16) оказывается равным \overline{U} и пропадает.

Доказательство (2.3), (2.4) потребует предварительно вывести ряд формул. Начнём с аксиомы полной индукции (2.5), которая выводится из условия Γ_N тривиальной подстановкой $x \rightarrow x_0$ и учётом истинности $x_0 \leq y$. Формулы, аналогичные (4.5) и (4.8) с условием Γ_N :

$$\overline{\Gamma_N} + \left(\forall x A(x) = A(x_0) \cdot \forall y, y_1 \left(\overline{D(y, y_1)} + A(y_1) \right) \right), \quad (4.17)$$

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{D(x, x_1)} + \overline{D(y, y_1)} + ((x \leq y) = (x_1 \leq y_1)) \quad (4.18)$$

легко выводятся повторением вывода (4.5), (4.8). Отметим, что все формулы и правила подстановки функции (константы) вместо свободной переменной, полученные для условия $\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_{<}$, не действуют до тех пор, пока не будет доказана эквивалентность условий (4.14).

Формула

$$\overline{\Gamma_N} + (x \leq y) + (y \leq x) \quad (4.19)$$

выводится индукцией по x выражения $\forall y((x \leq y) + (y \leq x))$. Истинность (4.19) при $x \rightarrow x_0$ очевидна. Для доказательства индуктивного шага:

$$\forall y((t \leq y) + (y \leq t)) + \overline{D(t, t_1)} + \forall z((t_1 \leq z) + (z \leq t_1))$$

преобразуем последнее слагаемое с учётом (4.17), (4.18) к виду $\overline{D(z, z_1)} + (t \leq z) + (z \leq t)$, откуда следует его истинность и всей формулы (4.19).

Из (4.19) имеем:

$$\overline{\Gamma_N} + (x \leq x), \quad (4.20)$$

и из определения предиката равенства (4.3):

$$\overline{\Gamma_N} + (x = x). \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.19) $y \rightarrow y_1$ с учётом $\Psi_<$ (4.1) получаем:

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{D(y, y_1)} + \overline{x \leq y} + (x \leq y_1). \quad (4.22)$$

Докажем теперь аксиому частичной индукции в усиленной форме:

$$\overline{\Gamma_N} + \forall A, x, y \left(A(x) + \exists t, t_1 (D(t, t_1) \cdot (x \leq t) \cdot A(t) \cdot \overline{A(t_1)}) + \overline{x \leq y} + A(y) \right), \quad (4.23)$$

отличающейся от (4.9) наличием дополнительного сомножителя $x \leq t$, который означает, что индуктивный шаг достаточно доказать не для всех t , а лишь удовлетворяющих $x \leq t$.

Осуществим подстановку $A(u) \rightarrow (x \leq u) \cdot A(u)$ в Ψ_I (4.9), входящую в условие Γ_N . Учтём, что

$$\overline{x \leq y} + (x \leq y) \cdot A(y) = \overline{x \leq y} + A(y).$$

Слагаемое $D(t, t_1) \cdot (x \leq t) \cdot A(t) \cdot \overline{(x \leq t_1)}$ равно \bar{U} ввиду (4.22), откуда следует (4.23).

Применим теперь усиленную аксиому индукции (4.23) к предикату $A(u) \rightarrow \overline{(u \leq x)} + A(u)$. Учтём при этом (4.20) и то, что

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{D(t, t_1)} + \overline{x \leq t} + \overline{t_1 \leq x} \quad (4.24)$$

следует непосредственно из (4.1). Тогда слагаемое, соответствующее индуктивному шагу в (4.23)

$$D(t, t_1) \cdot (x \leq t) \cdot (\overline{t \leq x} + A(t)) \cdot (t_1 \leq x) \cdot \overline{A(t_1)}$$

пропадает, и мы получаем

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{x \equiv y} + \overline{A(x)} + A(y). \quad (4.25)$$

Формулы (4.21), (4.25) носят название аксиом равенства. Приведённый вывод показывает, что они не являются независимыми аксиомами, а являются доказуемыми утверждениями.

Обратной подстановкой $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ в (4.25) получаем:

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{x \equiv y} + (A(x) = A(y)), \quad (4.26)$$

формулу, которую можно использовать как дополнительное правило вывода.

Положив в (4.18) $x_1 \rightarrow z$, $y_1 \rightarrow z$, имеем:

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{D(x, z)} + \overline{D(y, z)} + (x = y), \quad (4.27)$$

т.е. единственность предшествующего элемента у $D(x, z)$ при условии Γ_N . С учётом (4.25) получаем условие Ψ_- (2.4).

Наконец, положив в (4.18) $y \rightarrow x$, находим

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{D(x, x_1)} + \overline{D(x, y_1)} + (x_1 = y_1). \quad (4.28)$$

Это означает единственность последующего элемента у дифференцирующего предиката $D(x, x_1)$ и справедливость условия (2.3). Эквивалентность (4.14) доказана.

Условие Γ_N (4.15), определяющее одновременно предикат $D(x, y)$ сложения с единицей, предикат неравенства $x \leq y$, константу ноль x_0 и само множество N , имеет несравненно более компактный вид, чем $\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_<$ (состоит из 3-х сомножителей вместо 6). Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться исключительно условием Γ_N , однако, компактность здесь даже не главное.

Перед нами встанет задача приведения к ОНФС формул вида $\overline{\Gamma_N} + \Phi^1$, где Φ^1 – произвольная замкнутая формула I^1 . Если сохранить условие $\Gamma(D, x_0) \cdot \Psi_<$, то в слагаемом $\overline{\exists x_0 \Psi_0(x_0) \cdot \Psi_l(x_0)}$ в ходе приведения к ОНФС окажется связанная переменная x_0 в кванторной строке левее связанного предиката A^1 , что нас не устраивает. В условии же Γ_N переменная x_0 не содержится в аксиоме индукции, и поэтому x_0 и предикат A^1 оказываются в разных сомножителях Γ_N . В этом случае слагаемые $\overline{\Psi_0}$, $\overline{\Psi_<}$ в

$$\overline{\Gamma_N} + \Phi^1 = \overline{\Psi_l} + \overline{\Psi_0} + \overline{\Psi_<} + \Phi^1 \quad (4.28)$$

относим к Φ^1 и полученную формулу $\overline{\Psi_0} + \overline{\Psi_<} + \Phi^1$, являющуюся формулой I^1 приводим к дедуктивно эквивалентной нормальной форме Сколема $\exists x \forall y \Phi_C^1$, где Φ_C^1 – бескванторная формула. Слагаемое $\overline{\Psi_l}$ имеет кванторную строку $\exists A^1, u, v, \forall t, t_1$, и суммарно получаем кванторную строку вида $\exists A^1, p \forall q$ для (4.28). Такая формула, как мы видели в главе 1, приводится к ОНФС 1-го порядка.

§5. Исчисления I_N^1 и I_N^Z

Определим исчисления I_N^1 и I_N^Z как совокупность формул вида $\overline{\Gamma_N} + \Phi^1$ и $\overline{\Gamma_N} + \Phi$ соответственно, где Φ^1 – произвольная формула исчисления I^1 , а Φ – исчисления I^Z .

Для индивидуальных предикатов этих исчислений (формально переменных, но содержащих определяющее условие) будем далее использовать обычные общепринятые обозначения, например, $x \leq y$, $x < y$, $x = y$, а слагаемое $\overline{\Gamma_N}$ для краткости опускать. При этом сам факт наличия индивидуального предиката (со специальным обозначением) в формуле означает, что формула дополнительно содержит опущенное слагаемое $\overline{\Gamma_N}$. Для константы ноль (формально переменной, заданной условием (4.1)) также будем использовать более привычное обозначение 0.

Данное выше формальное определение предиката неравенства

$$\chi_{<} = \forall x, y \left((x \leq 0) \cdot ((x \leq y) = (\overline{y' \leq x})) \right), \quad (5.1)$$

а также метаопределение предиката равенства $x = y$:

$$(x \leq y) \cdot (y \leq x) \quad (5.2)$$

и строгого неравенства $x < y$:

$$\overline{y \leq x} \quad (5.3)$$

фиксирует эти предикаты как индивидуальные, т.е. единственные, удовлетворяющие условиям (5.1) – (5.3). Однако само по себе это ещё не означает, что из этих условий мы можем вывести все «обычные» свойства данных предикатов в рамках формализма I^Z без привлечения дополнительных аксиом. Иными словами мы должны вывести из (5.1) – (5.3) все те аксиомы, которыми

задаются предикаты $x \leq y$, $x = y$, $x < y$ при стандартном определении. Фактически большая часть этих аксиом уже выведена, в том числе, аксиомы равенства (4.21), (4.25). Осталось доказать транзитивность указанных операций:

$$\overline{x \leq y} + \overline{y \leq z} + (x \leq z), \quad (5.4)$$

$$\overline{x < y} + \overline{y < z} + (x < z), \quad (5.5)$$

$$\overline{x = y} + \overline{y = z} + (x = z), \quad (5.6)$$

Формула (5.4) доказывается с помощью аксиомы частичной индукции (4.23) подстановкой $A(y) \rightarrow \overline{y \leq z} + (x \leq z)$. При этом следует учесть доказуемое утверждение

$$(t \leq z) + \overline{(t' \leq z)}, \quad (5.7)$$

которое выводится из (4.22) с учётом (4.18) подстановкой $x \rightarrow x'$.

Соотношение (5.5) может быть переписано как эквивалентное

$$\overline{x'' \leq y'} + \overline{y' \leq z} + (x' \leq z) \quad (5.8)$$

ввиду (4.4) и (4.18). Из формулы (5.4) и (5.7) имеем $\overline{x'' \leq z} + (x' \leq z)$ и искомое утверждение (5.8), (5.5).

Транзитивность равенства (5.6) доказывается с помощью (5.4) и учётом определения (5.2).

Перейдём теперь к определению основных арифметических операций с помощью задания их как индивидуальные предикаты – функции. Для операции сложения имеем определяющее условие

$$\chi_+ = \forall x, y, z \left(((x + 0 = z) = (x = z)) \cdot ((x + y = z) = (x + y' = z')) \right) \quad (5.9)$$

Нетрудно доказать, что предикат сложения $x + y = z$ задан однозначно условием (5.9), и значение суммы z существует и единственно для любой пары x, y .

Предикат произведения определяется условием

$$\chi_x = \forall x, y, z \left(((x \cdot 0 = z) = (z = 0)) \cdot ((x \cdot y = z) = (x \cdot y' = z + x)) \right) \quad (5.10)$$

Здесь выражение $x \cdot y' = z + x$ следует понимать как подстановка значения функции $z + x = t$ в функцию $x \cdot y' = t$:

$$\exists t((x \cdot y' = t) \cdot (z + x = t))$$

Основные свойства введённых операций: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x \quad (5.11)$$

$$x + y + z = x + (y + z), \quad x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad (5.12)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (5.13)$$

доказываются с помощью аксиомы полной индукции.

Для того чтобы предикат разности $x \div y = z$ был всюду определённой функцией, положим $x \div y = 0$, если $x < y$. С учётом этого обстоятельства вместо обычного обозначения $x - y$ будем писать $x \div y$.

Данный предикат имеет метаопределение:

$$x \div y = z \sim (z + y = x) + (z = 0) \cdot (x \leq y). \quad (5.14)$$

Предикат целой части от деления $[x/y] = z$ также задаётся формулой метаязыка:

$$[x / y] = z \sim (z \cdot y \leq x) \cdot (x' \leq z' \cdot y) + (y = 0) \cdot (z = 0), \quad (5.15)$$

где мы положили по определению $[x/0] = 0$.

Определим ещё две вспомогательные функции:

$$y = p(x) \sim [x' / 0''] \cdot 0'' = y \quad (5.16)$$

и

$$y = q(x) \sim p(x) \div x = y. \quad (5.17)$$

Их смысл состоит в следующем: $q(x) = 0$ для чётных x и $q(x) = 0'$ для нечётных, $p(x) = x + q(x)$.

С помощью этих функций мы можем разделять чётные и нечётные числа натурального ряда.

В развитие полученных выше результатов возникает вопрос о задании индивидуальных предикатов и функций на других счётных множествах, отличных от N .

К таковым, в первую очередь, следует отнести множество целых чисел N_I и множество рациональных чисел N_R . На первый взгляд, кажется, что для этого придётся поменять базовое условие Γ_N или модифицировать, применительно к N_I , N_R и т.д. Однако делать это совсем не обязательно.

Пусть N_1 – альтернативное счётное множество, и $y = \ell(x)$ – функция, осуществляющая взаимно однозначное соответствие между множествами: $x \in N$, $y \in N_1$. Тогда произвольный индивидуальный предикат $P(x_1, \dots, x_n)$, определённый на N_1 , может

быть представлен как индивидный предикат $P(\ell(x_1), \dots \ell(x_n))$ на N . В том числе, если предикат $P(x_1, \dots x_n)$ является функцией, то и после подстановки $x_i \rightarrow \ell(x_i)$ он остаётся функцией, т.е. значение x_n существует и единственно для произвольных $x_1, \dots x_{n-1}$, при котором $P(\ell(x_1), \dots \ell(x_n))$ истинно. Это вытекает из взаимно однозначного соответствия N_1 и N . Таким образом, нам нет необходимости выходить за рамки исчислений I_N^1, I_N^Z .

В качестве примера рассмотрим операции сложения, вычитания и умножения на множестве целых чисел N_I . Пусть последовательности натуральных чисел $0, 0', 0'', 0''', \dots$ соответствует последовательность целых чисел $0, -1, 1, -2, 2, -3, \dots$. Тогда функции смены знака на N_I $y = -x$ соответствует функция

$$y = p(x) \div q(x') \quad (5.18)$$

на N . Операция алгебраического сложения $z = x + y$ на N_I имеет метаопределение

$$z = q(x' + y) \cdot (x + p(y)) + q(x + y) \cdot ((x \div p(y)) + (y \div p(x))) \quad (5.19)$$

на N . Операция умножения целых чисел имеет вид:

$$z = [p(x) \cdot p(y)/0''] \div q(x + y). \quad (5.20)$$

К числу основных свойств введённых операций сложения и умножения на N_I относятся коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы:

$$x \overset{i}{+} y = y \overset{i}{+} x, \quad x \overset{i}{\cdot} y = y \overset{i}{\cdot} x \quad (5.21)$$

$$x_{+}^i y_{+}^i z = x_{+}^i (y_{+}^i z), \quad x_{\cdot}^i y_{\cdot}^i z = x_{\cdot}^i (y_{\cdot}^i z), \quad (5.22)$$

$$x_{\cdot}^i (y_{+}^i z) = x_{\cdot}^i y_{+}^i x_{\cdot}^i z \quad (5.23)$$

Мы ввели обозначения $x_{+}^i y$, $x_{\cdot}^i y$ для этих операций, чтобы отличить их от аналогичных на N . Доказательство приведённых формул (формальный вывод в I^Z) весьма громоздко, хотя и не содержит принципиальных трудностей, поэтому мы его отпускаем. Для нас принципиально важна только сама возможность выразить указанные операции в исчислении I_N^1 .

Глава 3

Разрешающие процедуры на счётных множествах

§1. Рекурсивные функции

В предыдущей главе мы привели ряд примеров построения индивидуальных предикатов и функций на множестве натуральных чисел, а также других счётных множествах. Используя описанные приёмы, можно без труда расширить список примеров. Нас, однако, будут интересовать не частные, хотя и важные случаи, а принципиальные возможности предложенного подхода. Задача ставится следующим образом: пусть задано соотношение (предикат) или функция на некотором счётном множестве с помощью некоторого алгоритма. Требуется построить условие χ , определяющие данный предикат в I_N^1 . Мы даже усилим это условие, потребовав, чтобы в определении χ все предметные переменные были связаны только кванторами всеобщности в нормальной форме:

$$\chi_A = \forall x \Phi(A, x), \quad (1.1)$$

где $\Phi(A, x)$ – бескванторная формула, определяющая предикаты $A = (A_1, \dots, A_m)$ как индивидуальные и не содержащая других предикатов и свободных переменных. Здесь χ_A объединяет сразу все индивидуальные предикаты, участвующие в той или иной формуле, в том числе $\chi_<$ (5.1) гл.2.

Требование (1.1) использовать только кванторы всеобщности для определения A , на первый взгляд кажущееся несущественным, для дальнейшего построения имеет принципиальное значение.

Отметим, что все вышеприведённые условия $\chi_<$, χ_+ , χ_x, \dots удовлетворяют данному требованию.

Разумеется, это не относится к условию Γ_N , точнее сомножителю Ψ_I (4.9) гл.2, содержащему связанный одноместный предикат.

Поскольку мы рассматриваем общий случай произвольного алгоритмического задания предиката и взаимно однозначного отображения счётного множества на натуральный ряд, необходимо дать соответствующее определение рекурсивных функций, с помощью которых формируется понятие алгоритма.

В настоящее время теория рекурсивных функций получила значительное развитие, их свойства хорошо изучены, и им посвящена обширная литература. Мы ограничимся констатацией основных понятий и свойств, которое нам потребуется в дальнейшем.

Примитивно рекурсивные функции (ПРФ) – это всюду определённые на множестве $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ функции n переменных $y = f(x_1 - x_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), принимающие значения из N и задаваемые по следующим правилам. Функции

$$f_0(x) = x, \quad (1.2)$$

$$f_1(x) = x', \quad (1.3)$$

являются ПРФ.

Если $g(x), h(x)$, – ПРФ, то

$$f(x) = g(h(x)) \quad (1.4)$$

является ПРФ.

Если $g(x, y)$ - ПРФ, $c \in N$, то $f(x)$:

$$f(0) = c,$$

$$f(x') = g(x, f(x)) \quad (1.5)$$

есть ПРФ. При этом функции $g(x)$, $h(x)$, $g(x, y)$ могут зависеть и от других переменных: $g(x, z_1, z_2, \dots, z_m)$, В этом случае и функция $f(x)$ также будет зависеть от этих переменных: $f(x, z_1, \dots, z_m)$ То же относится к константе c , которая может быть функцией дополнительных переменных. Функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ также могут зависеть от других переменных: $f_0(x, z_1, \dots, z_m) \equiv x$, $f_1(x, z_1, \dots, z_m) \equiv x'$. В этом случае эта зависимость носит формальный характер, т.е. $f_0(x, z_1, \dots, z_m)$ – функция, тождественно равная первому аргументу и константе при изменении остальных аргументов.

Правило (1.4) носит название операции подстановки, или суперпозиции функций. Правило (1.5) – операция примитивной рекурсии. Определение совокупности ПРФ может варьироваться у разных авторов, но общее во всех случаях – это несколько простых исходных функций и 2 правила: подстановки и примитивной рекурсии для построения всех остальных ПРФ.

Частично рекурсивные функции (ЧРФ) – это функции, определяемые соотношениями (1.2) – (1.5) и дополнительной операцией μ -обращения – операцией вычисления обратной функции. Если $y = g(x)$ – ЧРФ, то

$$f(y) = x \quad (1.6)$$

есть – ЧРФ. При этом следует дополнительно учесть, что, если заданному $f(y)$ – аргументу обратной функции соответствует несколько значений x (или даже бесконечное число значений), то выбирается наименьшее. Если же не существует x , удовлетворяющего $y = g(x)$, то значение $f(y)$ не определено при данном y . Таким образом, область определения ЧРФ $x = f(y)$ совпадает с областью изменения функции $y = g(x)$. Функция $y = g(x)$ может зависеть от других переменных

z_1, \dots, z_m , соответственно, функция $x = f(y)$ будет иметь дополнительные аргументы z_1, \dots, z_m .

Поскольку правило (1.6) даёт в общем случае частичную (не всюду определённую на N) функцию, то правила (1.4), (1.5) модифицируются так, что функция $f(x)$ определена только для тех значений, для которых операции (1.4), (1.5) выполнены при соответствующих значениях ЧРФ $g(x)$, $h(x)$, $g(x, y)$.

Всюду определённая ЧРФ носит название общекурсивной функцией (ОРФ).

Произвольное подмножество множества натуральных чисел N по определению является рекурсивно перечислимым, если оно совпадает с областью определения некоторой ЧРФ.

Определим также рекурсивное подмножество множества N как множество значений аргумента некоторой произвольной ОРФ, при которых она обращается в ноль.

Основу теории алгоритмов составляют следующие два тезиса.

Тезис Черча. Произвольную алгоритмически детерминированную процедуру можно отождествить с процедурой вычисления значений некоторой ОРФ.

Тезис Клини. Процедуру поиска доказуемых утверждений (формул) в рамках произвольной корректно заданной формальной теории можно отождествить с процедурой вычисления области определения некоторой ЧРФ.

Если бы у нас уже были строгие определения понятий алгоритма и корректно заданной формальной теории, то приведённые тезисы мы могли бы рассматривать как теоремы, которые можно доказать или опровергнуть. Однако мы

располагаем только интуитивным представлением о том, что такое алгоритм и формальная теория. Поэтому указанные тезисы мы должны рассматривать как определение этих понятий, но при этом привести достаточно убедительные подтверждения соответствия этих определений интуитивным представлениям. Этим вопросам посвящена обширная литература, и здесь мы не будем в них углубляться.

Мы лишь конкретизируем приведённые утверждения. Пусть сформулирована некоторая формальная теория, все формулы которой занумерованы в соответствии с некоторым алгоритмом. Тогда множество доказуемых формул является рекурсивно перечислимым. Если установлено, что все истинные формулы теории доказуемы в рамках данного формализма, то это означает, что множество истинных формул является рекурсивно перечислимым. Примером является исчисление предикатов первого порядка I^1 , в котором теоремой Гёделя о полноте устанавливается доказуемость всех истинных формул.

Если построена алгоритмически детерминированная процедура, которая позволяет установить, истинна данная формула или нет за конечное число шагов, то это означает, что множество истинных формул рассматриваемой теории является рекурсивным. Для доказательства же алгоритмической неразрешимости теории нам необходимо доказать, что множество истинных формул теории не рекурсивно. Примером такой неразрешимой теории опять же является исчисление предикатов первого порядка I^1 , неразрешимость, которой установлена Черчем [1].

На первый взгляд не очень понятно, как может быть неразрешимой теория, для которой существует процедура построения доказательства для любой истинной формулы.

Действительно, если формула истинна, то этот факт может быть подтвержден за конечное число шагов. Но если формула ложна, то после любого конечного числа шагов мы остаёмся в неведении: либо формула ложна, либо истинна, но мы ещё не достигли конца доказательства истинности.

Существование аксиоматизируемых, но неразрешимых теорий означает, что существуют частично рекурсивные функции, не имеющие рекурсивных доопределений.

Полезно также иметь в виду, что, если дополнение до \mathbf{N} рекурсивно перечислимого множества является рекурсивно перечислимым, то оба этих множества рекурсивны (теорема Поста). Действительно, для произвольного x , $x \in \mathbf{N}$ имеем две частично рекурсивные процедуры, из которых одна должна оборваться через конечное число шагов. Выполняя по очереди шаги вычисления двух ЧРФ, мы определим через конечное число шагов, какому из двух рекурсивно перечислимых множеств принадлежит x .

Будем считать, что теория полна, если произвольная формула этой теории либо истинна, либо истинно её отрицание. Примером такой теории может служить арифметика Гёделя, которую можно определить как подтеорию $I_{\mathbf{N}}^1$, содержащую только два индивидных предиката: сложения и умножения. Предикат $x \leq y$ в этом случае определяется как $\exists z(x + z = y)$. Ввиду вышеизложенного доказательство неразрешимости арифметики Гёделя является одновременно доказательством её неаксиоматизируемости.

§2. Формально алгебраическое представление

Любая n – местная ПРФ может быть получена из некоторой m – местной ПРФ ($1 \leq m < n$) следующим образом. Определим функцию Кантора $z = c(x, y)$ соотношением:

$$z = s(x + y) + x, \quad (2.1)$$

где

$$s(x) = 0 + 1 + 2 + \dots + x = \frac{x(x+1)}{2} \quad (2.2)$$

Функция $z = c(x, y)$ осуществляет взаимно однозначное отображение прямого произведения множества натуральных чисел $N \times N$ на самого себя: $N \times N \leftrightarrow N$, т.е. каждой паре x, y ($x, y = 0, 1, 2, \dots$) соответствует единственное z ($z = 0, 1, 2, \dots$) и наоборот.

Введём также обратные функции $y = \ell(x)$ и $y = r(x)$ к функции $z = c(x, y)$:

$$\ell(z) = x, \quad (2.3)$$

$$r(z) = y. \quad (2.4)$$

Из определения (2.3), (2.4) следует справедливость тождеств: $x = \ell(c(x, y))$, $y = r(c(x, y))$, $z = c(\ell(z), r(z))$.

Легко видеть, что обратные к $c(x, y)$ функции $\ell(z)$, $r(z)$ могут быть вычислены по формулам

$$\ell(z) = z - s(t), \quad (2.5)$$

$$r(z) = t - \ell(z), \quad (2.6)$$

$$t = \left[\frac{\sqrt{8z+1}-1}{2} \right], \quad (2.7)$$

где скобки $[\]$ обозначают целую часть числа. Таким образом, функции $c(x, y)$, $\ell(z)$, $r(z)$ являются ПРФ.

Пусть $f(x, y)$ – произвольная ПРФ. Тогда мы можем построить одноместную ПРФ $g(z) = f(\ell(z), r(z))$. Зная функцию $g(z)$ легко восстанавливается $f(x, y)$: $f(x, y) = g(c(x, y))$. Аналогично можно трёхместную ПРФ свернуть в двухместную, а двухместную в одноместную с возможностью обратного восстановления трехместной ПРФ.

Таким образом, множество ПРФ с фиксированным числом переменных n (например, $n = 1$ или $n = 2$) содержит в себе (в указанном выше смысле) всё множество ПРФ с произвольным числом переменных. (Если переменных меньше n , например, при $n = 2$, функция $y = f(x)$ содержится среди двухместных функций в виде $f(x) = g(x, 0)$ или $f(x) = g(x, x)$).

Для дальнейшего нам потребуется определение ПРФ в виде формальной алгебры. Пусть на некотором (в нашем случае счётном) множестве $\{\ell_0, \ell_1, \ell_2 \dots\}$ заданы операции T_1, T_2, \dots (в нашем случае только одноместные или двухместные), и пусть элементы $\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots$ таковы, что любой элемент из $\{\ell_0, \ell_1, \dots\}$ может быть получен из элементов $\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots$ применением к ним конечного числа раз операций T_1, T_2, \dots . Тогда будем говорить, что задана алгебра A с операциями T_1, T_2, \dots на множестве $\{\ell_0, \ell_1, \dots\}$, а элементы $\ell_{i_1}, \ell_{i_2}, \dots$ порождают алгебру A .

Приведённое в §1 определение для ПРФ (1.2) – (1.5) не вполне подходит под сформулированное понятие алгебры, если считать элементами алгебры примитивно рекурсивные функции

$f_0, f_1, f_2 \dots$ с двумя операциями: подстановки (1.4) и примитивной рекурсии (1.5). Функции $f_0(x) = x$ (1.2) и $f_1(x) = x'$ (1.3) должны играть при этом роль порождающих алгебру элементов. Действительно, хотя в определении фигурируют только две операции, на самом деле их бесконечно много с формально алгебраической точки зрения. Пусть, g и h в (1.4) – не одноместные, а многоместные функции, например, $g(x_1, x_2, x_3)$ и $h(y_1, y_2, y_3)$. Тогда функции $g(x, h(y, x, z), y)$, $g(x, z, h(z, x, y))$, $g(x, y, h(z, u, v))$ получены действием разных операторов подстановки, хотя все они подпадают под определение (1.4). Иными словами для формального определения оператора подстановки необходимо, конкретизировать вместо какой переменной подставляется функция h и как группируются между собой остальные переменные. То же относится и к операции рекурсии (1.5), являющейся двухместным оператором, $\hat{R}(c, g)$, поскольку константа может зависеть от дополнительных переменных $c = c(t_1, t_2, \dots)$. Кроме того оператор $\hat{R}(c, g)$ не всюду определён на множестве ПРФ: например, функция g не может быть одноместной. Нам же необходимо, чтобы операторы алгебры были всюду определены на множестве ПРФ и давали однозначный результат.

Требуемым условием удовлетворяет алгебра Робинсона, заданная на множестве одноместных ПРФ. Алгебра содержит 3 операции: подстановки

$$f(x) = g(h(x)), \quad (2.8)$$

сложения

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad (2.9)$$

и рекурсии

$$f(x) = 0,$$

$$f(x') = g(f(x)). \quad (2.10)$$

Операции (2.8) – (2.10) всюду определены и дают однозначный результат. Алгебру порождают 2 функции:

$$f_0(x) = x' \quad (2.11)$$

$$f_1(x) = x - [\sqrt{x}]^2 \quad (2.12)$$

Произвольная n – местная ПРФ может быть восстановлена из некоторой одноместной ПРФ с помощью функции Кантора $z = c(x, y)$ (2.1).

Для наших целей, однако, потребуется аналогичная алгебра двухместных ПРФ. Кроме того следует подчеркнуть, что сведение всех ПРФ к одноместным функциям носит достаточно искусственный характер. В то же время двухместных ПРФ оказывается вполне достаточно, т.к. многоместные ПРФ с 3-мя и более аргументами встречаются крайне редко.

Алгебру двухместных ПРФ образуют 2 оператора: подстановки

$$f(x, y) = g(y, h(x, y)) \quad (2.13)$$

и примитивной рекурсии

$$f(x, 0) = x', \quad (2.14)$$

$$f(x, y') = g(y, f(x, y)), \quad (2.15)$$

с единственным порождающим элементом

$$f_0(x, y) = x. \quad (2.16)$$

Символически операторы подстановки и рекурсии будем обозначать так:

$$f = \hat{S}gh \quad (2.17)$$

$$f = \hat{R}g. \quad (2.18)$$

Условимся также обозначать произвольную ПРФ малой латинской буквой без индекса: $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, а конкретную, построенную тем или иным способом ПРФ, – малой латинской буквой с индексом. Например, $f_0(x, y)$ – функция тождественно равная первому аргументу и не зависящая от второго.

Поясним также, что из 12 возможных вариантов подстановки двухместной ПРФ в двухместную:

$$g(y, h(x, y)), \quad g(y, h(y, x)), \quad g(y, h(x, x)), \quad g(x, h(x, y)), \\ ,g(x, h(y, x)), \quad g(x, h(y, y)), \quad g(h(x, y), x), \dots$$

допустимым считается только первый вариант, а запись (2.17) означает (2.13) и только (2.13). Другие варианты подстановки в формализации отсутствуют. Оператор \hat{R} является одноместным, поскольку начальное условие (2.14) является фиксированным для всех $g(x, y)$.

Тот факт, что произвольная ПРФ может быть получена последовательным применением операторов \hat{S} и \hat{R} к единственной функции $f_0(x, y) = x$ не очевиден, поэтому остановимся на построении подробнее.

Обозначим через \hat{I} оператор смены порядка следования аргументов

$$f = \hat{I}g = \hat{S}gf_0 : \quad f(x, y) = g(y, x). \quad (2.19)$$

Функция $f_y = \hat{I}f_0$, $f_y = (x, y) = y$ является ПРФ.

Введём также оператор диагонализации \hat{D}_y :

$$f = \hat{D}_y g = \hat{S} g f_y: \quad f(x, y) = g(y, y) \quad (2.20)$$

и оператор \hat{D}_x :

$$f = \hat{D}_x g = \hat{D}_y \hat{I} g: \quad f(x, y) = g(x, x) \quad (2.21)$$

С помощью этих операторов реализуются все варианты подстановки двухместной ПРФ в двухместную. Например,

$$f = \hat{I} \hat{S} (g \hat{I} h) : \quad f(x, y) = g(x, h(x, y)), \quad (2.22)$$

$$f = \hat{S} (\hat{I} g h) : \quad f(x, y) = g(h(x, y), y), \quad (2.23)$$

$$f = \hat{I} \hat{S} (\hat{I} g \hat{I} h) : \quad f(x, y) = g(h(x, y), x) \quad (2.24)$$

и т.д.

Возможна подстановка двухместной ПРФ в одноместную:

$$f = \hat{S} (\hat{D}_y g h) : \quad f(x, y) = g(h(x, y), h(x, y)), \quad (2.25)$$

и одноместной в двухместную:

$$f = \hat{I} \hat{S} (g \hat{D}_x h) : \quad f(x, y) = g(x, h(y, y)), \quad (2.26)$$

$$f = \hat{S} (\hat{I} g \hat{D}_x h) : \quad f(x, y) = g(h(x, x), y),$$

а также одновременная подстановка двух одноместных ПРФ в двухместную:

$$f(x, y) = g(h(x, x), p(y, y)), \quad (2.27)$$

которая реализуется подстановкой $p(y, y)$ в $g(h(x, x), y)$.
Обозначим

$$f'_0(x, y) = x', \quad (2.28)$$

$$f_0^-(x, y) = |y - 1|. \quad (2.29)$$

Легко видеть, что

$$f'_0 = \hat{R}f_y, \quad (2.30)$$

$$f_0^- = \hat{D}_y \hat{R}f_0. \quad (2.31)$$

Имеем:

$$f_{01} = \hat{D}_y \hat{R}f_0^-: \quad f_{01}(x, y) \equiv 1, \quad (2.32)$$

т.е. тождественная константа 1 является ПРФ,

$$f_{00}(x, y) = f_0^-(f_{01}) \equiv 0. \quad (2.33)$$

Подстановкой f_{01} в f'_0 получаем, что любая натуральная константа является ПРФ.

Оператор \hat{R}_x определим соотношениями:

$$f = \hat{R}_x g: \quad f(x, 0) = x, \quad f(x, y') = g(y, f(x, y)) \quad (2.34)$$

Он отличается от оператора \hat{R} начальным условием: $f(x, 0) = x$ вместо $f(x, 0) = x'$, и реализуется так. Пусть $h(x, y) = g(x, |y - 1|) + 1$, $p = \hat{R}h$, тогда $f(x, y) = |p(x, y) - 1|$ удовлетворяет $f = \hat{R}_x g$.

Теперь мы можем получить операцию рекурсии с произвольным начальным условием:

$$f(x, 0) = p(x), \quad f(x, y') = g(y, f(x, y)). \quad (2.35)$$

Для этого необходимо в функцию h , $h = \hat{R}_x g$ подставить $p(x)$:

$$f(x, y) = h(p(x), y).$$

В частности, определим оператор \hat{R}_0 так:

$$f = \hat{R}_0 g: \quad f(x, 0) = 0, \quad f(x, y') = g(y, f(x, y)) \quad (2.36)$$

С его помощью можно записать основные арифметические операции:

$$f_1^- = \hat{R}_0 f_0 : \quad f_1^-(x, y) = y - 1 \quad (2.37)$$

(в т.ч. $f_1^-(x, 0) = 0$),

$$f_+ = \hat{R}_x \hat{I} f_0' : \quad f_+(x, y) = x + y, \quad (2.38)$$

$$f_- = \hat{R}_x f_1^- : \quad f_-(x, y) = x - y, \quad (2.39)$$

где $f_-(x, y) = 0$, если $x \leq y$,

$$f_+' = \hat{R} \hat{I} f_0' : \quad f_+'(x, y) = x' + y, \quad (2.40)$$

$$s_y = \hat{R}_0 f_+' : \quad s_y(x, y) = \frac{y(y+1)}{2} \quad (2.41)$$

(далее первый аргумент в $s_y(x, y)$ опустим и будем просто писать $s(y) = \frac{y(y+1)}{2}$),

$$x \cdot y = s(x + y) - s(x) - s(y). \quad (2.42)$$

Функция Кантора запишется следующим образом:

$$c(x, y) = s(x + y) + x \quad (2.43)$$

Обратная к $s(x)$ функция $s^{-1}(x)$, принимающая значения $s^{-1}(y) = 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3 \dots$ при $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \dots$ задаётся так:

$$s^{-1} = \hat{R}_0 \mathcal{G}_S, \quad s^{-1}(y) = \left\lfloor \frac{\sqrt{8y+1}-1}{2} \right\rfloor, \quad (2.44)$$

где

$$\mathcal{G}_S(x, y) = y + (x'' - s(y')). \quad (2.45)$$

С помощью s^{-1} определяются обратные по отношению к $s(x, y)$ функции $\ell(x)$, $r(x)$ (2.5), (2.6). Функция $f_q(y) = \lfloor \sqrt{y} \rfloor$ (скобки означают целую часть числа) задаётся так:

$$f_q = \hat{R}_0 \mathcal{G}_q, \quad (2.46)$$

где

$$\mathcal{G}_q(x, y) = y + (x'' - y' \cdot y'). \quad (2.47)$$

Отсюда следует, что функция $\mathcal{G}(x) = x - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2$ является ПРФ.

Полученный материал позволяет реализовать все 3 операции алгебры Робинсона (2.8) – (2.10) и порождающие алгебру функции (2.11), (2.12), а также содержит функцию Кантора $s(x, y)$ в качестве ПРФ, что доказывает полноту алгебры f_0, \hat{S}, \hat{R} (2.16) – (2.18).

§3. Рекурсивные предикаты

В предыдущей главе были приведены многочисленные примеры построения (заданием определяющего условия χ) предикатов-функций. Нетрудно видеть, что все построенные

функции являются ПРФ. Рассмотрим теперь общий случай (1.2) – (1.5).

Функции $f_0(x) \equiv x$ соответствует просто индивидный предикат равенства $x = y$, а функции $f_1(x) \equiv x'$ – предикат $x' = y$. Если $\mathcal{F}(x, y)$, $G(x, y)$, $H(x, y)$ – предикаты, соответствующие функциям $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ удовлетворяет (1.4), то предикат $\mathcal{F}(x, y)$ определяется условием

$$\forall x, y, z (\overline{H(x, y)} + (\mathcal{F}(x, y) = G(z, y))) \quad (3.1)$$

Формула (3.1) легко может быть обобщена на случай, когда $g(x)$, $h(x)$ содержат дополнительные переменные. Например, условие (2.13) перепишется так:

$$\forall x, y, t (\overline{H(x, y, t)} + (\mathcal{F}(x, y, z) = G(y, t, z))). \quad (3.2)$$

Операция рекурсии (1.5) запишется следующим образом:

$$\forall x, y, z \left(\left((\mathcal{F}(0, y) = (y = 0^{(c)})) \cdot (\overline{\mathcal{F}(x, z)} + (\mathcal{F}(x, y') = G(x, z, y))) \right) \right). \quad (3.3)$$

Эта формула также обобщается на случай зависимости начального условия и предиката G от дополнительных переменных.

Операция μ -обращения (1.6) может быть представлена формулой

$$\forall x, y, z \left((\overline{G(y, x)} + \overline{G(z, x)} + (\mathcal{F}(x, y) = (y \leq z))) \cdot (G(y, x) + \overline{\mathcal{F}(x, y)}) \right), \quad (3.4)$$

где $\mathcal{F}(x, y) \sim f(x)$ – обратная по отношению к $G(y, x) \sim g(y)$ функция. Здесь $\mathcal{F}(x, y)$ при фиксированном x может быть истинно не более, чем при одном значении y . Если $f(x)$ не определено при некотором x , то $\mathcal{F}(x, y)$ ложно для всех y .

Формулы (3.1) – (3.4) позволяют построить индивидуальный предикат для произвольной ОРФ, однако при построении предиката, описывающего произвольную ЧРФ возникает следующая трудность. Пусть $f(x)$ частичная функция, полученная из всюду определённой функции $g(x)$ операцией μ -обращения (1.6). Тогда, хотя определённый формулой (3.4) предикат $\mathcal{F}(x, y)$ является индивидуальным, но при дальнейшем его использовании в операции подстановки (1.4) в качестве функции $h(x)$ предикат $\mathcal{F}(x, y)$, определяемый формулой (3.1), уже не будет индивидуальным. Действительно, если $h(x)$ не определено при некотором x , то $H(x, z)$ будет ложно при всех z , и $\mathcal{F}(x, y)$ может иметь произвольную истинность. Поэтому ниже остановимся отдельно на процедуре построения формул, определяющих произвольную ЧРФ.

Обратим также внимание на то, что определение ОРФ как всюду определённой ЧРФ можно трактовать двояко. 1. В ходе построения данной ОРФ на некоторых этапах операция μ -обращения могла дать не всюду определённые функции, но окончательно построенная ЧРФ оказалась всюду определённой. 2. На всех этапах построения ОРФ мы имели всюду определённые функции. Назовём первое определение ОРФ определением в широком смысле, а второе – определением в узком смысле. Формально определение, данное в §1, является определением в широком смысле. Формулы же (3.1) – (3.4) могут задать ОРФ только в узком смысле. Однако ниже будет доказана эквивалентность этих двух определений ОРФ.

Индивидный предикат $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n)$ будем называть рекурсивным, если существует ОРФ $f(x_1 \dots x_n)$, принимающая значение ноль при тех и только тех значениях аргументов $x_1 \dots x_n$, при которых $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n)$ истинен, т.е. $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n) = (f(x_1 \dots x_n) = 0)$.

Пусть R_1, R_2, \dots, R_K – индивидные предикаты, заданные некоторым условием χ_R , содержащим только кванторы всеобщности в нормальной форме. Докажем, что все эти предикаты рекурсивны.

Построим бесконечную последовательность подмножеств множества N : $M_0 = \{0\}$, $M_1 = \{0, 0'\}$, $M_2 = \{0, 0', 0''\}$, ..., зафиксируем некоторое n и определим на M_n предикаты R_1^n, \dots, R_K^n , совпадающими с теми же предикатами на N . Отметим, что из-за наличия операции сложения с единицей нам потребуются знания значений предикатов за пределами M_n . Пусть c – максимальное число штрихов, встречающееся у переменной в χ_R . Тогда при изменении переменных в χ_R на множестве M_n , нам может потребоваться знание значений предикатов R_1^n, \dots, R_K^n на множестве M_{n+c} .

Будем считать, что предметные переменные изменяются на M_n , а предикаты R_1^n, \dots, R_K^n определены на M_{n+c} . Если предикаты R_1, R_2, \dots, R_K удовлетворяют χ_R , то предикаты R_1^n, \dots, R_K^n также удовлетворяют χ_R . Проблема в том, что на конечном множестве может быть несколько наборов предикатов, удовлетворяющих χ_R , в то время как на N по предположению существует единственный набор R_1, \dots, R_K , удовлетворяющий χ_R – условию индивидности предикатов R_1, \dots, R_K .

Если некоторый набор предикатов $\overline{Q^n} = \langle Q_1^n, \dots, Q_K^n \rangle$ удовлетворяет χ_R на M_n , то тот же набор урезанных предикатов на M_m , $m < n$ удовлетворяет χ_R . Пусть имеется не один, а

несколько наборов предикатов $\bar{R}^m, \bar{Q}^m, \dots$ на множестве M_m , удовлетворяющих χ_R . Уточним, что, хотя указанные предикаты задаются на множестве M_{m+c} , будем различать наборы только на подмножестве M_m , т.е. два набора предикатов, совпадающих на M_m , но различных на M_{m+c} будем считать одним набором. Приведённое выше утверждение означает, что для любого n , $n > t$ любой набор предикатов \bar{Q}^n является доопределением некоторого набора предикатов \bar{Q}^m на множестве M_m . Тогда при росте n , $t < n < \infty$ количество наборов предикатов на множестве M_m может только сокращаться из-за того, что для некоторых наборов \bar{Q}_1^m, \bar{Q}_2^m не оказалось расширения на M_n , удовлетворяющего χ_R .

При неограниченном росте n имеются две возможности: либо остаётся единственный набор предикатов \bar{R}^m на M_m , удовлетворяющий χ_R , либо существует, по крайней мере, ещё один набор \bar{Q}^m , удовлетворяющий χ_R . Предположим второе. Тогда для любого последующего m_1 , $m_1 > t$ также будет существовать (в пределе $n \rightarrow \infty$), по крайней мере, ещё один набор \bar{Q}^{m_1} , не совпадающий с \bar{R}^{m_1} и являющийся расширением \bar{Q}^m . Определим набор предикатов \bar{Q} как результат объединения бесконечной последовательности $\bar{Q}^0, \bar{Q}^1, \bar{Q}^2, \dots$. Тогда набор \bar{Q} также будет удовлетворять χ_R на N . Действительно, при подстановке любого набора констант вместо предметных переменных x_1, x_2, \dots, x_ℓ , связанных квантором всеобщности в χ_R , мы получим $\chi_R = U$, поскольку это условие выполнено для \bar{Q}^m на M_m , где m — максимальная из констант, участвующих в подстановке. По предположению набор \bar{R} является единственным, удовлетворяющим χ_R . Полученное противоречие доказывает единственность \bar{R}^m при $n \rightarrow \infty$.

Пусть n_m – то значение n , при котором в списке наборов $\bar{R}^m, \bar{Q}^m, \dots$ остаётся только один набор \bar{R}^m . Если набор был один с самого начала, то полагаем $n_m = m$. Докажем, что функция $y = f_1(x)$, где $y = n_m$ при $x = m$ является ОРФ.

Пусть p_i – число переменных в предикате R_i ($1 \leq i \leq k$) и $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$. Тогда полное число наборов предикатов, заданных на \mathbf{M}_m , равно $2^{(m+1)^p}$. Занумеруем всевозможные наборы предикатов в порядке возрастания m , а при равных m – произвольным образом.

Определим функцию $z = f_r(x, y)$ следующим образом: $f_r(m, 0)$ – число различных наборов предикатов $\bar{R}^m, \bar{Q}^m, \dots$ на \mathbf{M}_m , удовлетворяющих χ_R , а $f_r(m, n - m)$ – число различных наборов $\bar{R}^m, \bar{Q}^m, \dots$, оставшихся после рассмотрения на расширенном множестве \mathbf{M}_n . Определим также функцию $z = f_q(m, n - m)$, как номер первого набора в списке наборов предикатов $\bar{R}^m, \bar{Q}^m, \dots$.

Функции $f_r(x, y)$, $f_q(x, y)$ являются ПРФ, поскольку их вычисление алгоритмически детерминировано, и их значения ограничены некоторой ПРФ. Тогда функция $y = f_1(x)$ является результатом операции μ -обращения функции $f_r(x, y)$: значение $f_1(x)$, равно минимальному значению y , при котором $f_r(x, y) = 1$. Номер набора предикатов \bar{R}^m на \mathbf{M}_m будет равен $f_q(x, f_1(x))$.

Выше мы доказали, что операция μ -обращения для $f_r(x, y)$ будет всегда выполнена, т.е. $f_1(x)$ – ОРФ, а вместе с ней и $f_q(x, f_1(x))$. Отсюда нетрудно построить для каждого предиката R_1, R_2, \dots, R_k ОРФ, определяющую этот предикат, ч.т.д. (здесь везде были использованы ОРФ в узком смысле).

Из доказанного следует, что все ОРФ, полученные с помощью формул (3.1) – (3.4), получены с помощью рекурсивных предикатов, поскольку в (3.1) – (3.4) при определении индивидуальных предикатов использованы только кванторы всеобщности.

Наоборот, пусть $R(x_1 \dots x_n, y)$ – предикат произвольной ОРФ. Тогда $R(x_1 \dots x_n, 0)$ – рекурсивный предикат, соответствующий этой ОРФ.

Суммируя, получаем: с помощью условия χ , содержащего только кванторы всеобщности в нормальной форме, можно задать как индивидуальный любой рекурсивный и только рекурсивный предикат. Предикат, определяющий произвольную ОРФ, сам является рекурсивным и определяется через цепочку рекурсивных предикатов. Если рекурсивный предикат является всюду определённой функцией, то эта функция общерекурсивна.

§4. Универсальные функции

Вернёмся к определению условий χ для ЧРФ. Выше мы упоминали, что условия (3.1) – (3.3) подстановки и примитивной рекурсии не подходят для частичных функций. Модификация же формул (3.1) – (3.3) потребует использования квантора существования, что нас не устраивает.

Для решения поставленной задачи рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $R(x_1 \dots x_n, y)$ – искомый предикат некоторой произвольной ЧРФ $y = r(x_1 \dots x_n)$ и $Q_1, Q_2 \dots Q_\ell$ – предикаты промежуточных функций, через которые определяется данная ЧРФ. Введём вспомогательные предикаты, дополнив список переменных в каждом предикате $R, Q_1, Q_2 \dots Q_\ell$ ещё одной переменной $R^+(x_n, \dots x_n, y, t)$, и аналогично $Q_1^+, Q_2^+ \dots Q_\ell^+$. При любом фиксированном $t = c$ ($0 \leq c < \infty$)

предикат R^+ отличается от $R(x_1 \dots x_n, y)$ тем, что $R^+(x_1 \dots x_n, y, c) = \bar{U}$ если значение хоть одной переменной $x_1 \dots x_n, y$, превосходит c . В остальных случаях предикаты R и R^+ совпадают. То же относится и к предикатам Q_1, \dots, Q_ℓ . При фиксированном $t = c$ процедура построения предикатов $R^+, Q_1^+, \dots, Q_\ell^+$, алгоритмически детерминирована и ограничена некоторой ПРФ, поэтому R^+ является примитивно рекурсивным предикатом, т.е. существует некоторая ПРФ $r_R(x_1 \dots x_n, y, t)$, равная 0 в том и только том случае, когда $R^+(x_1 \dots x_n, y, t) = U$.

При фиксированном $t = c$ все функции, определяемые предикатами $R^+, Q_1^+, \dots, Q_\ell^+$ являются частичными, причём функция $y = r^+(x_1 \dots x_n, c)$ может быть не определена, даже если $x_1 \leq c \dots x_n \leq c$, $y = r(x_1 \dots x_n) \leq c$, поскольку на промежуточных этапах вычисления получались значения функций из Q_1, \dots, Q_ℓ превосходящие c . Однако, если $r(x_1 \dots x_n)$ определена при некоторых фиксированных $x_1 \dots x_n$, то и функция $r^+(x_1 \dots x_n, t)$ будет определена для всех $t, t \geq t_0$. Здесь величина t_0 определяется максимальным промежуточным значением функций Q_1, \dots, Q_ℓ в ходе вычисления $y = r(x_1 \dots x_n)$ и константой c . Следует учесть также, что при росте t области определения всех функций R, Q_1, \dots, Q_ℓ могут только увеличиваться и, если для некоторого t какой-либо предикат из R, Q_1, \dots, Q_ℓ принимает значение U , то он будет истинным и для всех последующих t . Отсюда следует формула

$$R(x_1 \dots x_n, y) = \exists t R^+(x_1 \dots x_n, y, t) \quad (4.1)$$

В итоге в общем случае определения предиката ЧРФ мы выходим за рамки условия использования только кванторов всеобщности в χ_R . Однако в дальнейшем мы поступим следующим образом. Условие χ_{R^+} запишем для примитивно рекурсивного предиката $R^+(x_1 \dots x_n, y, t)$. Сам же предикат

$R(x_1 \dots x_n, y)$ формально вводить не будем, а будем использовать его метаопределение (4.1), т.е. везде где необходимо в некоторой формуле $\Phi_N^1(R)$ использовать предикат $R(x_1 \dots x_n, y)$, фактически будем подставлять формулу $\exists t R^+(x_1 \dots x_n, y, t)$.

Возможен и другой способ определения предиката R . Осуществим свёртку переменных y, t с помощью функции Кантора $z = c(y, t)$, а также для простоты свёртку аргументов $x_1 \dots x_n$: $x = c(x_1, c(x_2, \dots))$. В результате получим предикат $R^+(x, z)$, определяемый некоторой ПРФ $r_R(x, z)$.

Расширим алгебру двухместных ПРФ $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}\}$ дополнительной операцией μ -обращения:

$$f = \hat{M}g: f(x, y) = \min z | g(x, z) = y. \quad (4.2)$$

Действие оператора \hat{M} отличается от общей операции μ -обращения (1.6), (3.4) тем, что \hat{M} действует только на вторую переменную двухместной функции. Это необходимо для формальной алгебраической определённости оператора \hat{M} . В результате мы имеем алгебру частичных двухместных функций $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}\}$, все элементы которой являются ЧРФ. Удостоверимся, что эта алгебра определяет все ЧРФ. Рассмотрим функцию $z = f_R(x, 0)$, где

$$f_R = \hat{M}r_R. \quad (4.3)$$

Область определения $f_R(x, 0)$ совпадает с областью определения искомой ЧРФ (4.1), поскольку $\exists z$ равносильно $\exists y \exists t$ в (4.1), поэтому функцию $f_R(x, 0)$ назовём характеристической ЧРФ для (4.1). Сама же ЧРФ (4.1) равна

$$y = \ell(f_R(x, 0)). \quad (4.4)$$

Таким образом, произвольная ЧРФ может быть получена из f_0 операторами \hat{S} и \hat{R} , а также однократным применением оператора \hat{M} . Запись ЧРФ с помощью формул (4.3), (4.4) носит название представления в форме Клини [1].

Построим теперь универсальную ПРФ. Для этого каждой ПРФ в алгебре $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}\}$ припишем индекс по следующим правилам. Функция f_0 сохраняет свой индекс 0. Если

$$f_t = \hat{R}g_x, \quad \text{то} \quad t = c(x, 0) + 1. \quad (4.5)$$

Если

$$f_t = \hat{S}g_x h_y, \quad \text{то} \quad t = c(x, y') + 1. \quad (4.6)$$

Данная индексация позволяет приписать каждой ПРФ определённый индекс, и любому индексу t ($0 \leq t < \infty$) соответствует определённая ПРФ. Иначе: зная только индекс t у произвольной ПРФ $f_t = (x, y)$, мы можем однозначно восстановить функцию f_t .

Запишем условие χ_c , определяющее функцию Кантора $z = c(x, y)$:

$$\chi_c = \forall x, y, z (C(0, 0, 0) \cdot \overline{C(0, 0, z')} \cdot (C(0, x', z') = C(x, 0, z)) \cdot (C(x', y, z') = C(x, y', z))) \quad (4.7)$$

Теперь можно определить предикат $P(t, x, y, z)$, соответствующий функции $z = f_t(x, y)$:

$$\chi_p = \forall t, x, y, z, u, v, w (P(0, x, y, x) \cdot (\overline{C(u, v', t) \cdot P(u, y, z, w) \cdot P(v, x, y, z)} + P(t', x, y, w))) \cdot$$

$$\left(\overline{C(u, 0, t) + P(t', x, 0, x') \cdot (\overline{P(u, y, z, w) \cdot P(t', x, y, z)} + P(t', x, y', w))} \right) \cdot \left(\overline{P(t, x, y, u) \cdot P(t, x, y, v)} + (u \leq v) \right) \Bigg). \quad (4.8)$$

Здесь первый сомножитель соответствует f_0 , второй – формуле (4.6), третий – формуле (4.5). Последний сомножитель означает единственность значений функции $f_t(x, y)$.

Предикат $P(t, x, y, z)$, рассмотренный как функция $z = p(t, x, y)$, является универсальной ПРФ. Отметим, что универсальная функция для системы всюду определённых функций не может принадлежать этой совокупности. Например, универсальная ПРФ не является ПРФ, универсальная ОРФ не является ОРФ и т.д. Действительно, пусть $z = p(t, x, y)$ – ПРФ. Тогда $z = p(x, x, y) + 1$ – также ПРФ, не совпадающая ни с одной из функций $z = f_t(x, y)$, что противоречит универсальности $p(t, x, y)$. Сказанное не относится к частичным функциям, как мы увидим ниже.

Построим также универсальную ЧРФ. Произвольная одноместная ЧРФ может быть получена из некоторой ПРФ $r_R(x, z)$ операций μ -обращения (4.3) и взятия функции от функции (4.4). Наоборот, для любой ПРФ $r_R(x, z)$ по указанной схеме строится некоторая ЧРФ. Если теперь применить операции (4.3), (4.4) к универсальной ПРФ, то получим универсальную ЧРФ для одноместных функций.

Применяя формулу (3.4) к $p(t, x, y, z)$ и подставляя $z = 0$, имеем:

$$\chi_Q = \forall t, x, y, y_1 \left(\left(\overline{P(t, x, y, 0)} + \overline{P(t, x, y_1, 0)} + (Q(t, x, y) = (y \leq y_1)) \right) \right) \cdot (P(t, x, y, 0) + \overline{Q(t, x, y)}), \quad (4.9)$$

где $Q(t, x, y)$ – соответствует $y = f_R(x, 0)$, t – параметр. Метаопределение универсальной ЧРФ, соответствующее (4.4), имеем вид:

$$\exists u (L(u, y) \cdot Q(t, x, u)) \quad (4.10)$$

или

$$\exists u, v (C(y, v, u) \cdot Q(t, x, u)), \quad (4.11)$$

где $L(u, y) \sim y = \ell(u)$ – обратная функция Кантора. Здесь параметр t нумерует всевозможные ПРФ. С другой стороны, $y = f_q(t, x)$ (4.10) сама является ЧРФ, т.к. все операции построения $f_q(t, x)$ дают двухместную ЧРФ. Действительно, предикат $P(t, x, y, z)$ по построению является рекурсивным, всюду определённая функция $z = z(t, x, y)$ является ОРФ, операции μ – обращения (4.9) и подстановки (4.10) дают ЧРФ.

Важном свойством универсальной ЧРФ $f_q(t, x)$ является отсутствие рекурсивного доопределения до всюду определённой функции $f_{q,0}(t, x)$. Действительно, предположим, что такое доопределение существует. Тогда $f_{q,0}(x, x) + 1$ - ОРФ, но в списке всех одноместных ЧРФ, а значит, и ОРФ отсутствует.

§5. Полная система предикатов

Назовём арифметикой подтеорию исчисления I_N^1 , состоящую из формул, содержащих только рекурсивные предикаты. Произвольная формула арифметики имеет вид:

$$\bar{\chi}_R + \Phi^1(\bar{R}), \quad (5.1)$$

где \bar{R} – произвольный набор рекурсивных предикатов, χ_R – формула, определяющая предикаты \bar{R} . Все предметные переменные χ_R связаны кванторами всеобщности в нормальной форме.

Рассмотрим подмножество формул арифметики, в котором все переменные Φ^1 связаны квантором существования:

$$\bar{\chi}_R + \exists x \Phi_0^1(\bar{R}, x), \quad (5.2)$$

где Φ_0^1 – бескванторная формула. Множество истинных формул такой теории рекурсивно перечислимо, т.е. теория аксиоматизируема. Для доказательства истинности формулы вида (5.2) достаточно по очереди подставлять всевозможные наборы натуральных чисел в (5.2), пока не дойдём до того набора, при котором (5.2) истинно.

Однако при всей кажущейся простоте эта теория неразрешима в ОРФ (т.е. алгоритмически неразрешима). Предположим противное. Рассмотрим формулу

$$\overline{\chi_{<} \cdot \chi_C \cdot \chi_P \cdot \chi_Q} + \exists y, u, v (C(y, v, u) \cdot Q(n, n, u)), \quad (5.3)$$

где n – некоторая константа $0, 0', 0'', \dots$. Разрешимость данной теории означает, что мы, в том числе, располагаем алгоритмом определения, при каком n (5.3) истинно, а при каком – ложно. Это означает, что мы осуществили рекурсивное доопределение диагонали универсальной ЧРФ $f_z(u, x)$, хотя в предыдущем параграфе была доказана невозможность такого доопределения.

Из неразрешимости совокупности формул (5.3) при $n = 0, 0', 0'' \dots$ следует неразрешимость теории, содержащей все

формулы I_N^1 вида $\exists x \Phi_0^1(\bar{A}, x)$, где Φ_0^1 – произвольная бескванторная формула I^1 . Здесь следует учесть, что $\chi_<$, χ_c , χ_P , χ_Q содержат только кванторы всеобщности в нормальной форме.

Для сравнения отметим, что подтеория исчисления предикатов первого порядка I^1 , содержащая формулы вида $\exists x \Phi_0^1(\bar{A}, x)$, $\forall x \Phi_0^1(\bar{A}, x)$, $\forall x \exists y \Phi_0^1(\bar{A}, x, y)$, где Φ_0^1 – бескванторные формулы I^1 , разрешимы. Неразрешимой теорией является вся I^1 , формулы которой допускают упрощение до $\exists x \forall y \Phi_0^1(\bar{A}, x, y)$.

Подтеория арифметики, состоящая из формул вида

$$\bar{\chi}_R + \forall x \Phi_0^1(\bar{R}, x), \quad (5.4)$$

где Φ_0^1 – бескванторная формула I^1 , неаксиоматизируема и неразрешима. Действительно, из двух формул (5.2) и $\bar{\chi}_R + \forall x \Phi_0^1(\bar{R}, x)$ истинна одна и только одна. Если множество истинных формул типа (5.4) рекурсивно перечислимо, то по теореме Поста оба множества (5.2) и (5.4) рекурсивны, что противоречит доказанной неразрешимости (5.3) и (5.2).

Пусть χ_R определяет некоторое конечное число рекурсивных предикатов R_1, R_2, \dots, R_k . Систему предикатов R_1, \dots, R_k назовём полной, если с их помощью возможно метаопределение любой ЧРФ, т.е. существует формула $\Phi^1(R_1, \dots, R_k)$, тождественно равная предикату данной ЧРФ.

Тривиальным примером полной системы является набор из трёх предикатов $x \leq y$, $C(x, y, z)$, $P(u, x, y, z)$. Выше было показано, что с их помощью может быть определена произвольная ЧРФ. Достаточен только один предикат

$P(u, x, y, z)$, но для его определения необходимы предикаты $x \leq y$, $C(x, y, z)$.

Наибольший интерес представляет пара трёхместных предикатов сложения $x + y = z$ и умножения $x \cdot y = z$. Гёделю удалось доказать их полноту и тем самым получить замечательный результат – неразрешимость арифметики [1,3,4].

Для доказательства полноты указанной пары предикатов достаточно доказать выразимость произвольной ПРФ ввиду (4.1). В свою очередь, метаопределение подстановки функции в функцию может быть без труда записано для произвольных предикатов (3.1), (3.2). Поэтому основную трудность при доказательстве полноты в данном случае составляет выразимость операции примитивной рекурсии. Однако на этом мы здесь останавливаться не будем.

Основным способом получения полных систем со всеми вытекающими следствиями является возможность выразить в системе R_1, \dots, R_K другую полную систему, например, сложение и умножение. Так, операции сложения и умножения на множестве целых чисел, определённые в гл.2., образуют полную систему. Список можно неограниченно продолжать.

Нас, однако, будет интересовать построение наиболее «экономной» полной системы. На первый взгляд, кажется, что здесь трудно на чём-то ещё сэкономить: ведь теории, содержащие по отдельности только операцию сложения и операцию умножения, разрешимы. Тем не менее, единственный двухместный предикат может образовывать полную систему.

Отметим, что нам не потребуется даже предикат неравенства, т.е. вместо условия Γ_N (4.15) гл.2. достаточно условие $\Gamma(D, x_0)$ (2.6) гл.2, содержащее только дифференцирующий

предикат $D(x, y)$ – предикат сложения с единицей и константу ноль x_0 . Кстати, в арифметике Гёделя также не требуется предикат неравенства $x \leq y$, поскольку его роль выполняет формула $\exists t(x + t = y)$, являющаяся метаопределением предиката $x \leq y$. Поэтому здесь также достаточно условия $\Gamma(D, x_0)$.

Дадим сначала наглядное описание предиката $V(x, y)$, образующего полную систему в арифметике. Область истинности $V(x, y)$, на плоскости (x, y) состоит из бесконечной последовательности пар треугольных блоков, размер стороны которых последовательно растёт $n = 1, 2, 3, \dots$. Начало блока приходится на значение $x = 0, 1, 3, 6, \dots$ для $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, т.е. $x_n = s(n - 1)$, где $s(t) = 0 + 1 + \dots + t$ (2.2). В пределах n -го блока $x = s(n - 1) + p$, $(0 \leq p \leq n - 1)$ значения истинности $V(x, y)$, удовлетворяют неравенством $0 \leq y \leq p$ и $n + 1 \leq y \leq n + 1 + p$. Для остальных значений y предикат $V(x, y)$ ложен.

Если бы область истинности $V(x, y)$ состояла бы только из последовательности одинарных нижних блоков, то она удовлетворяла бы неравенству $0 \leq y \leq \ell(x)$, где $\ell(x)$ – обратная функция Кантора (2.3). Вторая же цепочка состоит из блоков, сдвинутых на $n + 1$ шаг вверх по оси y .

Формальное определение предиката $V(x, y)$ состоит из задания начальных условий при $x = 0$ и $y = 0$ с последующим определением значений $V(x, y)$ для каждого столбца $V(x, y)|_{x=k+1}$ через значения предыдущего $V(x, y)|_{x=k}$. Начальное условие имеет вид:

$$\chi_v^0 = V(x, 0) \cdot \overline{V(0, 0')} \cdot V(0, 0'') \cdot \overline{V(0, x'')} . \quad (5.5)$$

Если значение x является не последним в блоке, то значение $V(x', y')$ в последующем столбце x' задаётся условием

$$\chi_v^1 = \overline{V(x, z)} \cdot \overline{V(x, z')} \cdot V(x, z'') + (V(x', y') = V(x, y) + V(x, y')) \quad (5.6)$$

Если же значение x является последним в блоке, то при x' предикат $V(x, y)$ будет истинен только для двух значений: $y = 0$ и $y = n + 1$, где n – номер нового блока. При $y = 0$ предикат $V(x', y)$ определён начальным условием, а для остальных значений условием

$$\chi_v^2 = \overline{V(x, z)} \cdot \overline{V(x, z')} \cdot V(x, z'') + \overline{V(x', 0')} \cdot (V(x', y'') = \overline{V(x, y)} \cdot V(x, y')) \quad (5.7)$$

В совокупности определение для $V(x, y)$ имеет вид:

$$\chi_v = \forall x, y, z (\chi_v^0 \cdot \chi_v^1 \cdot \chi_v^2). \quad (5.8)$$

Покажем теперь, как с помощью одного лишь предиката $V(x, y)$ можно дать метаопределение для любого рекурсивного предиката.

Начнём с определения функции $y = s(x) = 0 + 1 + \dots + x$ (2.2):

$$V(y, x'') \cdot \overline{V(y, 0')}. \quad (5.9)$$

Действительно, сомножитель $V(y, 0')$ истинен тогда и только тогда, когда y соответствует началу нового блока, т.е. $y = 0, 1, 3, 6 \dots$. При этом $V(y, x)$ истинно только для двух значений x : $x = 0$ и $x = n + 1$. Соответственно $V(y, x'')$ будет истинно только для $x = n - 1$, т.е. $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ для $y = 0, 1, 3, 6, \dots$.

Рассмотрим произведение

$$\chi_+^1 = \exists t(\overline{V(t, x')} \cdot V(t, x'') \cdot V(t, y) \cdot \overline{V(t, y')} \cdot V(t, z'') \cdot \overline{V(t, z''')})), \quad (5.10)$$

наложив дополнительное условие $z'' > y$. Произведение $\overline{V(t, x')} \cdot V(t, x'')$ может быть выполнено только в том случае, если t соответствует блоку с номером $x' = n$, т.е. $s(x) \leq t \leq s(x) + x$. Комбинация $V(t, y) \cdot \overline{V(t, y')}$ может быть выполнена в двух случаях: когда y относится к верхней границе нижнего блока $t = s(x) + y$, либо к верхней границе верхнего блока $t = s(x) + y - x - 2$. То же самое относится и к z'' в произведении $V(t, z'') \cdot \overline{V(t, z''')}$, но мы условились, что $z'' > y$. Поэтому y относится к нижнему блоку, а z'' – к верхнему.

В этом случае имеем $x + y = z$, если $y \leq x$ при $t = s(x) + y$, и условие (5.10) не выполнено, если $x < y$. Поскольку в нашем распоряжении нет предиката неравенства, мы не можем просто дополнить (5.10) сомножителем $y \leq z'$, однако эту роль сыграет другой сомножитель:

$$\chi_+^2 = \exists p(V(p, y) \cdot \overline{V(p, y')} \cdot V(p, y'') \cdot \overline{V(p, z''')} \cdot \overline{V(p, z''''')}) \quad (5.11)$$

Действительно, произведение $V(p, y) \cdot \overline{V(p, y')} \cdot V(p, y'')$ может быть выполнено только для p , соответствующих последнему числу в пределах блока, когда расстояние между блоками минимально и составляет единицу, т.е. $p = s(y) + y$. В этом случае произведение $\overline{V(p, z''')} \cdot \overline{V(p, z''''')}$ может быть выполнено только, если z''' находится выше верхнего блока, т.е. $2y \leq z$, а с учётом $y \leq x$ это соотношение справедливо. Таким образом, предикат $\chi_+^1 \cdot \chi_+^2$ выражает предикат $(x + y = z) \cdot (y \leq x)$. Отсюда предикату суммы $x + y = z$ соответствует

$$\chi_+ = \chi_+^1(x, y, z) \cdot \chi_+^2(x, y, z) + \chi_+^1(y, x, z) \cdot \chi_+^2(y, x, z) \quad (5.12)$$

Располагая функциями $y = s(x)$ и $x + y = z$, можно записать произведение $x \cdot y = z$ в виде

$$s(x + y) - s(x) - s(y) = z, \quad (5.13)$$

а функцию Кантора $c(x, y)$ как $s(x + y) + x$ (2.1).

Учтём также, что операция сложения $x + y = z$ одновременно является и операцией вычитания $x = z - y$. Правда, при этом формула (5.12) в случае $y > z$ ложна для всех значений x , т.е. операция не определена, но поскольку заведомо $s(x) + s(y) \leq s(x + y)$, в (5.13) вычитание всегда выполнимо.

Таким образом, единственный предикат $V(x, y)$ образует полную систему предикатов арифметики, поскольку с его помощью может быть выражена другая полная система – сложения и умножения.

Обратим внимание на то, что суть проблемы представления арифметики единственным предикатом состоит даже не в том, что этот предикат позволяет выразить операции сложения и умножения, а в том, что он должен быть локально детерминированным. Это означает следующее. Произвольный рекурсивный предикат мы можем задать с помощью условия, содержащего только кванторы всеобщности, но в общем случае, это делается через цепочку других рекурсивных предикатов. Однако предикат $V(x, y)$ должен быть определён сразу без дополнительных промежуточных предикатов используя только дифференцирующий предикат $D(x, y)$ сложения с единицей. Этот предикат связывает только ближайшую пару чисел и не является «дальнодействующим». Поэтому предикат $V(x, y)$ должен обладать следующим свойством: каждое последующее значение $V(x', y')$ должно целиком и полностью определяться некоторым фиксированным числом значений ближайших

соседей, что и было реализовано в условиях (5.6), (5.7). Разумеется, таким свойством, позволяющим задать предикат без промежуточных предикатов, обладает далеко не каждый рекурсивный предикат.

Полученный результат означает, что исчисление I_N^1 , содержащее единственный переменный двухместный предикат, неразрешимо. Поскольку предикат $V(x, y)$ задаётся только с помощью кванторов всеобщности (которые в слагаемом $\bar{\chi}_y$ перейдут в кванторы существования), а операции сложения и умножения определяются через $V(x, y)$ только с помощью квантора существования, может создаться впечатление, что данной исчисление с $V(x, y)$ неразрешимо уже для формул, содержащих только квантор существования. Однако это не так. Дело в том, что гёделевское представление рекурсивных предикатов через функции сложения и умножения требует кванторов обоих типов.

Тем не менее этот более сильный результат всё таки оказывается справедлив, правда, для этого потребуется внести изменения в предикат $V(x, y)$, который мы обозначим как $W(x, y)$. Смысл этих изменений состоит в том, что предикат должен совмещать внутри себя два предиката: $V(x, y)$ и $P(t, x, y, z)$ - предикат универсальной ПРФ (4.8). Определим значения $W(x, 0)$ как чередующиеся: истинные для чётных x и ложные для нечётных условием $W(0, 0) \cdot (W(x', 0) = \overline{W(x, 0)})$. Для чётных x предикат $W(x, y)$ зададим равным $V(x, y)$: $W(2 \cdot x, y) = V(x, y)$. Это достигается с помощью условий (5.5) – (5.7) с соответствующими корректировками для x . Далее записываем метаопределение предиката суммирования, при этом следует учесть, что первый аргумент $V(t, x)$ в (5.10), (5.11) вообще не фигурирует в предикате суммирования, а находится под квантором существования $\exists t$ и $\exists p$.

В нашем случае для $W(t, x)$ в формулы (5.10) и (5.11) следует ввести дополнительный сомножитель $W(t, 0)$ и $W(p, 0)$ соответственно, означающий, что для p и t следует рассматривать только четные значения. С помощью предиката суммирования строим предикат $x + x = z$ умножения (деления) на 2 для пересчёта значений первого аргумента из $V(t, x)$ в $W(t, x)$ и обратно. Это позволяет дать метаопределение функций $y = s(x)$ и $y = c(x, y) = s(x + y) + x$, а также предиката $x \leq y$.

Условие χ_p (4.8), определяющее универсальную ПРФ $P(t, x, y, z)$ следует предварительно преобразовать в условие для $P(t, u)$, являющееся свёрткой $P(t, x, y, z)$ с помощью функции Кантора. Последняя имеет метаопределение с помощью только кванторов существования. Следует учесть, что свёртка возможна в двух вариантах:

$$\exists u, v (P(t, u) \cdot C(x, v, u) \cdot C(y, z, v)), \quad (5.14)$$

$$\forall u, v (\overline{C(x, v, u) \cdot C(y, z, v)} + P(t, u)). \quad (5.15)$$

В зависимости от того, стоит $P(t, x, y, z)$ под знаком отрицания в (4.8) или нет – выбирается (5.14) или (5.15) с тем, чтобы условие для χ_p содержало только кванторы всеобщности. Отметим, что предикат $C(x, y, z)$ в (4.8) стоит только под знаком отрицания и соответственно даёт только кванторы всеобщности в кванторную строку. Проблему может создать только неравенство $u \leq v$ в (4.8), но по смыслу последнего сомножителя (4.8) там должно стоять равенство $u = v$. Его мы заменим на $\forall q (W(q, u) = W(q, v))$, поскольку это равенство может быть выполнено только при $u = v$. Затем мы доопределяем предикат $W(x, y)$ для нечётных x как предикат $P(t, u)$, заданный модифицированным условием (4.8), что превращает предикат $W(x, y)$ в индивидуальный.

Мы не будем приводить здесь все выкладки и явно выписывать все условия, определяющие $W(x, y)$, ввиду их громоздкости, ограничившись принципиальной возможностью такого построения. Поскольку с помощью предиката $W(x, y)$ может быть записана универсальная ЧРФ, то произвольный рекурсивный предикат имеет метаопределение через $W(x, y)$ с помощью только квантора существования. Соответственно теория I_N^1 , содержащая только предикат $W(x, y)$ и квантор существования, неразрешима.

§6. Арифметические функции.

Дополним алгебру двухместных ЧРФ $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}\}$ ещё одним одноместным оператором \hat{Z} :

$$f = \hat{Z}g, \quad (6.1)$$

где $f(x, y) = g(x, y)$, если частичная функция $g(x, y)$ определена для данных x, y и $f(x, y) = 0$, если $g(x, y)$ не определена. Таким образом, оператор \hat{Z} просто доопределяет нулём частичную функцию g в тех точках, в которых она не определена. Если g – всюду определённая функция, то $f = g$.

Можно рассматривать и более общий случай доопределения нулём n -местных ЧРФ, однако определение (6.1) не умаляет общности, поскольку произвольную n -местную функцию можно сначала свернуть до двухместной с помощью функции Кантора $z = c(x, y)$, а затем восстановить как n -местную ($n > 2$). Учитывая, что $c(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$, получаем эквивалентность действия \hat{Z} на двухместную и n -местную функцию.

Выше было установлено, что универсальная ЧРФ не имеет рекурсивного доопределения, поэтому оператор \hat{Z} расширяет класс функций, удовлетворяющих алгебре $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}\}$.

Функции алгебры $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}, \hat{Z}\}$ будем называть арифметическими функциями Клини (АФ). Фактически Клини даёт другое определение для АФ, однако нетрудно доказать эквивалентность двух определений. Мы будем пользоваться определением (6.1), поскольку оно менее громоздко и выглядит более естественным.

Следует подчеркнуть, что АФ в общем случае не являются финитно вычислимыми функциями, т.е. некоторые их значения вычисляются как результат предельного перехода. В то же время ЧРФ финитно вычислимы в тех точках, в которых они определены. Однако саму проблему нефинитности порождают именно ЧРФ, поскольку задача установления области определения произвольной ЧРФ является нефинитной.

Условие $\chi_{\mathcal{F}}$, определяющее предикат $\mathcal{F}(x, y)$, соответствующий функции $y = f(x)$, полученной доопределением нулём функции $y = g(x)$ с соответствующим предикатом $G(x, y)$, выглядит так:

$$\chi_{\mathcal{F}} = \forall x, y, z ((\exists t (G(x, t) + \mathcal{F}(x, 0) \cdot \overline{\mathcal{F}(x, y')}) \cdot \overline{G(x, z)} + (\mathcal{F}(x, y) = G(x, y))))). \quad (6.2)$$

С учётом формул (3.1)–(3.4) условие (6.2) позволяет построить индивидуальный предикат, определяющий произвольную АФ. Отметим, что такое определение неизбежно будет содержать квантор существования в силу нерекурсивности произвольной АФ.

Осуществим дополнительную дифференциацию всего множества АФ, а именно, будем считать подмножество АФ, состоящее из тех АФ, для определения которых потребовалось применить оператор \hat{Z} не более k раз ($k = 0, 1, 2, \dots$), подмножеством k -го уровня. Таким образом, имеем бесконечную последовательность $N_A^0 \subset N_A^1 \subset N_A^2 \subset \dots$ подмножеств множества $N_A = N_A^0 \cup N_A^1 \cup N_A^2 \cup \dots$ всех АФ. В том числе, N_A^0 – множество всех ЧРФ.

Наша задача сейчас установить, что N_A^{k+1} содержит функции, которых нет в N_A^k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Пока мы установили этот факт лишь для случая $k = 0$ (действие оператора \hat{Z} на универсальную ЧРФ. даёт функцию, не являющуюся ОРФ).

Дополним алгебру двухместных ПРФ некоторой всюду определённой функцией $z = p(x, y)$, не являющейся в общем случае ПРФ: $\{f_0, p, \hat{S}, \hat{R}\}$, т.е. увеличим число элементов, порождающих алгебру ПРФ до двух. Элементы такой алгебры будем называть примитивно рекурсивными функциями относительно p . Аналогично введём понятие частично рекурсивной функции относительно p и общерекурсивной относительно p как элементы алгебры $\{f_0, p, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}\}$.

Введём также понятие рекурсивного предиката $R(x_1, \dots, x_n)$ относительно предиката $P(x_1, \dots, x_n)$ как предиката, описываемого рекурсивной функцией $r(x_1, \dots, x_n)$:

$$R(x_1, \dots, x_n) = (r(x_1, \dots, x_n) = 0) \quad (6.3)$$

относительно $p(x_1, \dots, x_m) \sim P(x_1, \dots, x_m)$.

Условие χ_R , определяющее предикат R , может быть записано с помощью соотношений (3.1) – (3.4) с использованием только

квантора всеобщности и при участии предиката P . Правда, сам предикат P определяется через условие χ_P с участием квантора существования.

Повторяя рассуждения §3 для относительно рекурсивных функций и предикатов, получаем аналогичные результаты: условие χ_R , содержащее только кванторы всеобщности, определяет всевозможные рекурсивные и только рекурсивные предикаты R относительно P . Если предикат $R(x_1, \dots, x_n, y)$ является всюду определённой функцией, то эта функция является ОРФ относительно P в том и только том случае, когда предикат $R(x_1, \dots, x_n, y)$ является рекурсивным относительно P .

Повторяя рассуждения §4, можно построить универсальную ПРФ относительно функции $z = p(x, y)$ в форме аналогичной (4.8). Отличие состоит в том, что функцию $p(x, y)$ необходимо переобозначить как f_1 , а нумерацию (4.5), (4.6) сдвинуть на единицу.

Универсальная ЧРФ относительно p строится по формулам (4.9) – (4.11) и сама является ЧРФ относительно p . Действуя оператором \hat{Z} на универсальную ЧРФ относительно p , получаем функцию, не являющуюся ОРФ относительно p .

Теперь мы можем построить иерархию универсальных АФ следующим образом. Пусть $q_0(x, y)$ – универсальная ЧРФ (4.11). Обозначим $p_1 = \hat{Z}q_0$. Построим универсальную ЧРФ относительно p_1 , которую обозначим и введём $p_2 = \hat{Z}q_1$. Продолжая эту процедуру имеем:

$$p_{k+1} = \hat{Z}q_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.4)$$

где q_k – универсальная ЧРФ относительно p_k . Нетрудно видеть, что q_k перечисляет все элементы множества N_A . В силу

сделанного выше замечания p_{k+1} , не содержится в N_A^k , что доказывает строгое неравенство $N_A^k \subset N_A^{k+1}$.

Функцию $p_k(x, y)$ назовём базовой функцией множества N_A^k , положив по определению $p_0 = f_0$. Таким образом, универсальная функция $q_k(x, y)$ может быть получена поочерёдным применением операторов \hat{M} и \hat{Z} ($k+1$ раз \hat{M} и k раз \hat{Z}) и некоторого числа раз операторов \hat{S} и \hat{R} . Обратим внимание, что действие оператора \hat{Z} на функцию y (4.4) равносильно действию \hat{Z} на f_k (4.3). Поэтому при вычислении базовых функций p_k можно объединить два оператора \hat{M} и \hat{Z} в один:

$$\hat{M}_z = \hat{Z}\hat{M}, \quad (6.5)$$

имеющий смысл операции μ -обращения с доопределением нулём результирующей функции. Тогда базовая функция p_k может быть построена k -кратным применением оператора \hat{M}_z (наряду с операторами \hat{S} и \hat{R}), а универсальная функция q_k может быть построена k -кратным применением оператора \hat{M}_z и последующим однократным применением оператора \hat{M} .

Поскольку каждой частичной АФ соответствует всюду определённая АФ с доопределением нулём, то наличие частичных функций среди АФ не является значимым расширением всего множества функций (в отличие от ЧРФ и ОРФ, где разница существенна). Поэтому можно просто рассмотреть алгебру всюду определённых двухместных АФ: $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}_z\}$. Приведённые выше рассуждения доказывают, что эта алгебра перечисляет все всюду определённые функции алгебры $\{f_0, \hat{S}, \hat{R}, \hat{M}, \hat{Z}\}$.

Рассмотрим произвольную формулу арифметики

$$\overline{\chi_R} + Qx\Phi_0(\bar{R}, x), \quad (6.6)$$

где $R = R_1, \dots, R_m$ – набор произвольных рекурсивных предикатов, Φ_0 – бескванторная формула I_N^1 , все предметные переменные связаны и χ_R – условие, определяющее \bar{R} . Пусть $y = r_i(\mathbf{z})$ – характеристическая функция, соответствующая $R_i(\mathbf{z})$ (также ОРФ) равная 0, если $R(\mathbf{z}) = U$ и равная 1, если $R_i(\mathbf{z}) = \bar{U}$.

Формула $\Phi_0(\bar{R}, x)$ может быть представлена как совокупность операций отрицания и логического сложения. Если формула $\Phi(x)$ имеет характеристическую функцию $f(x)$, то формуле $\overline{\Phi(x)}$ соответствует $1 - f(x)$. Если формулам $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ соответствуют функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то $\Phi_1(x) + \Phi_2(x)$ имеет характеристическую функцию $f_1(x) \cdot f_2(x)$. Это позволяет построить характеристическую ОРФ $y = f_\Phi(x)$ для $\Phi_0(\bar{R}, x)$.

Пусть кванторная строка Qx (6.6) состоит из k групп однородных кванторов. Для определённости положим, что последняя группа состоит из кванторов существования: $Qt\exists u\Phi_0(\bar{R}, t, u)$. Осуществим свёртку всех переменных \mathbf{t} в одну переменную t , а также переменных \mathbf{u} в u с помощью функции Кантора в характеристической функции $f_\Phi(x)$. В результате получим $g_\Phi(t, u)$. Тогда характеристическая функция для формулы $\exists u\Phi_0(\bar{R}, t, u)$ запишется так:

$$f_\Phi^1(t) = d(h(t, 0)), \quad (6.7)$$

где

$$h = \widehat{M}_z p_\Phi, \quad (6.8)$$

$$p_\Phi(t, 0) = 1, \quad p_\Phi(t, u') = g_\Phi(t, u). \quad (6.9)$$

Здесь $d(x)$ – натуральный аналог дельта – функции: $d(0) = 1$, $d(x') = 0$. Вспомогательная функция $p_\Phi(t, u)$ введена для того, чтобы избежать коллизии $g_\Phi(t, 0) = 0$ и $\forall x \overline{g_\Phi(t, x)} = 0$.

Если последняя группа переменных в Qx связана квантором всеобщности, то характеристическая функция вычисляется с учётом

$$\forall u \Phi_0(\bar{R}, t, u) = \overline{\exists u (\Phi_0(R, t, u))}.$$

Таким образом, формуле (6.6) соответствует значение некоторой АФ k -го порядка, т.е. арифметика разрешима в АФ [1]. Следует подчеркнуть, что нет единой разрешающей АФ для всей арифметики, а есть лишь АФ k -го порядка для формул, содержащих k групп однородных кванторов.

Мы рассмотрели свойства рекурсивных предикатов, т.е. индивидуальных предикатов, задаваемых только с помощью кванторов всеобщности. Снимем теперь это последнее ограничение. Априори можно думать, что предикаты, определение которых содержит смешанную кванторную строку, также имеют некую иерархию, аналогичную рассмотренной выше для АФ. Однако здесь ситуация меняется радикальным образом. Построим предикат универсальной функции для всех всюду определённых АФ. Поскольку базовая функция $p_k(x, y)$ содержит в себе все АФ порядка ниже k , то достаточно построить универсальную базовую функцию $p(k, x, y)$.

Пусть $P(k, t, x, y, z)$ – предикат, перечисляющий все относительные, полученные из базовой функции $z = p_k(x, y)$ операциями \hat{S} и \hat{R} по схеме, описанной в §4 для построения универсальной ПРФ (4.8). Разница в том, что $P(k, 0, x, y, z)$ соответствует базовая функция $z = p_k(x, y)$ вместо $z =$

$f_0(x, y) = x$, и лишь при $k = 0$ имеем $P(0, 0, x, y, z) = P(0, x, y, z)$. По аналогии с (4.8):

$$\begin{aligned} \chi_P^A = \forall k, t, x, y, z, u, v, w (& \overline{P(0, 0, x, y, x)} \cdot \\ & \overline{(C(u, v', t) \cdot P(k, u, y, z, w) \cdot P(k, v, x, y, z) + P(k, t', x, y, w))} \cdot \\ & \overline{(C(u, v, t) + P(k, t', x, o, x')) \cdot (P(k, u, y, z, w) \cdot P(k, t', x, y, z) +} \\ & \overline{P(k, t', x, y', w))) \cdot (P(k, t, x, y, u) \cdot P(k, t, x, y, v) + (u \leq v))}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

получаем условие, определяющее предикат $P(k, t, x, y, z)$, правда пока без начального условия $t = 0$, при котором перечисляются базовые функции $z = p_k(x, y)$.

Для этого предварительно определим предикат $Q(k, t, x, y)$ – аналог $Q(t, x, y)$ (4.9), построенный относительно $p_k(x, y)$, а не $f_0(x, y)$ ($p_0(x, y) = f_0(x, y)$). Условие χ_Q^A для $Q(k, t, x, y)$ полностью повторяет условие χ_Q для $Q(t, x, y)$ (4.9), однако мы видоизменим его, сразу доопределив нулём функцию $y = f_{R,k}(x, 0)$, соответствующую $Q(k, t, x, y)$, в тех точках, где она не определена. Имеем:

$$\begin{aligned} \chi_Q^A = \\ \forall k, t, x, y_1, y_2 \left(\overline{(P(k, t, x, y_1, 0) \cdot P(k, t, x, y_2, 0) \cdot (y_1 \leq y_2))} + \right. \\ \left. Q(k, t, x, y_1)) \cdot (\exists y P(k, t, x, y, 0) + Q(k, t, x, 0)) \cdot \right. \\ \left. \overline{(Q(k, t, x, y_1) \cdot Q(k, t, x, y_2) + (y_1 \leq y_2))} \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Последний сомножитель в (6.11) означает единственность значений функции $y = \hat{Z}f_{R,k}(x, 0)$.

Теперь можно определить $P(k, 0, x, y, z)$ по индукции:

$$\chi_0^A = \forall k, t, x, y, u, v \left(\overline{C(y, v, u)} + (P(k', 0, t, x, y,) = Q(k, t, x, u)) \right), \quad (6.12)$$

причём начальный шаг индукции по k уже содержится в (6.10). Отметим, что функция $y = \hat{Z}f_{R,k}(x, 0)$ всюду определена, поэтому использовано обычное правило подстановки этой функции в функцию $z = \ell(y)$ с помощью кванторов всеобщности (а не в форме (4.10), (4.11)). Окончательно условие, определяющее универсальную АФ имеет вид:

$$\chi_u^A = \chi_{<} \cdot \chi_c \cdot \chi_P^A \cdot \chi_Q^A \cdot \chi_0^A$$

Отсюда следует, что теория, содержащая индивидуальный предикат $P(k, t, x, y, z)$ неразрешима в АФ. Всего одна переменная, связанная квантором существования в определении предиката, приводит к радикальному усложнению теории.

Вернёмся теперь к рассмотрению теории I_N^1 , содержащей переменные предикаты. Ранее мы установили, что подтеория, состоящая из формул вида $\exists x \Phi_0(x)$, содержащих только кванторы существования, неразрешима в ОРФ, но истинные формулы рекурсивно перечислимы (доказуемы). Полученный результат означает, что подтеория I_N^1 , состоящая из формул вида

$$\exists x \forall y \Phi_0(x, y) \quad (6.13)$$

неразрешима даже в АФ (здесь следует учесть, что χ_u^A и его сомножитель χ_Q^A , содержащий квантор $\exists y$, стоят под знаком отрицания). Таким образом, добавление одной единственной переменной, связанной квантором всеобщности, превращает всю теорию в неразрешимую в АФ.

Глава 4

Математика континуума

§1. Вещественные числа

Наиболее важными и значимыми с прикладной точки зрения являются теории, содержащие математические операции и функции, заданные на континууме. Это связано с особенностями нашего реального физического пространства: основные законы физики описываются непрерывно меняющимися величинами. Для рассмотрения таких теорий в I^Z представляется естественным задать некое новое условие, Γ_c вместо Γ_N , которое будет определять множество мощности континуум (вместо счётного множества), и далее дополнительными условиями определить предикаты тех или иных операций на континууме.

Такой путь действительно возможен, и он будет рассмотрен в следующей главе. Настоящая же глава будет посвящена построению математики континуума в рамках исчисления I_N^Z с условием Γ_N . На первый взгляд такая постановка задачи может показаться невыполнимой: ведь все операции в данном исчислении задаются на счётном множестве N . Однако следует учесть, что, хотя множество, на котором задаются предикаты, счётно, но множество самих переменных предикатов на счётном множестве имеет мощность континуума.

Действительно, переменный предикат $A(x)$ можно отождествить с произвольным действительным числом $0 \leq \alpha \leq 1$, представив значение истинности $A(0)$, $A(\theta')$, $A(0'')$, ... как двоичную запись числа α , положив $U \sim 0$, $\bar{U} \sim 1$. При таком определении каждому предикату $A(x)$ однозначно соответствует некоторое вещественное число $0 \leq \alpha \leq 1$. Но вещественному числу α может соответствовать два предиката $A_0(x)$ и $A_1(x)$.

Назовём 2^n -рациональным числом рациональное число, знаменатель которого является степенью 2. Все остальные вещественные числа будем называть 2^n -иррациональными числами. Любому 2^n -рациональному числу соответствуют два предиката $A_0(x)$ и $A_1(x)$.

Например, числу $1/2$ соответствуют предикаты с таблицами истинности 10000 ... и 011111 Наоборот, 2^n - иррациональное число однозначно представляется предикатом $A(x)$.

Если потребовать, чтобы была недопустимой ситуация, при которой, начиная с некоторого номера x , двоичное представление числа α состояло из одних единиц, то будет реализовано взаимно однозначное соответствие вещественных чисел $0 \leq \alpha < 1$ и переменных предикатов $A(x)$. Соответствующее ограничительное условие имеет вид:

$$\forall x \exists y ((x \leq y) \cdot A(y)). \quad (1.1)$$

Для записи неотрицательных чисел $0 \leq \alpha$ введём видоизменённую систему кодирования. Сохраним требование (1.1), и расшифруем последовательность нулей и единиц (значений $A(x) = U$ и $A(x) = \bar{U}$) следующим образом. Если последовательность начинается с 0, то двоичную точку α числа ставим сразу после этого нуля. Если последовательность начинается с n идущих подряд единиц, то эти единицы вместе с первым нулём отбрасываются, и точка ставится после n знаков оставшейся последовательности. При такой системе кодирования каждому предикату, удовлетворяющему (1.1), соответствует некоторое вещественное число α , $0 \leq \alpha$. Но для того, чтобы это кодирование было взаимно однозначным, необходимо добавочное требование: если первая цифра – единица, то после первого нуля обязательно следует единица. Соответствующее условие выглядит так:

$$\exists x \forall y \left(A(x) \cdot \overline{A(x')} \cdot \left(\overline{A(y)} + (x \leq y) \right) \right) + A(0). \quad (1.2)$$

Например, последовательностям 111010011000 ... и 11110010011000 ... соответствует одно и то же число 100.11000... Условию (1.2) при этом удовлетворяет только первая последовательность.

Наконец, для записи произвольного вещественного числа можно ввести следующую кодировку. Если первая цифра последовательности – ноль, то $\alpha \leq 0$., если – единица, то $\alpha \geq 0$. Абсолютное значение α задаётся вышеприведённой системой кодирования (со сдвигом номера x на единицу).

Данная система кодирования допускает неоднозначность только для $\alpha = 0$. Для взаимно однозначного соответствия потребуем недопустимость последовательности, состоящей только из нулей:

$$\exists x \overline{A(x)} \quad (1.3)$$

Это означает, что $\alpha = 0$ определяется как 10000 ..., а вариант 0000 ... исключается. В дальнейшем, по мере необходимости, мы будем использовать все три варианта кодирования.

Для обозначения вещественных чисел, а затем и функций вещественной переменной, будем использовать малые греческие буквы. Разумеется, это понятие метаязыка, в то время как малые латинские буквы обозначают натуральные переменные формализма I_N^Z .

Вещественное число будем считать рекурсивным (примитивно рекурсивным), если соответствующий ему предикат является рекурсивным (примитивно рекурсивным).

Нетрудно определить основные арифметические операции с вещественными числами. Мы ограничимся определением операции сложения для первого типа кодирования $0 \leq \alpha < 1$. Пусть $A_1(x)$, $A_2(x)$ предикаты чисел α_1 и α_2 . Метаопределение суммы $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ имеет вид:

$$(A_1(x) = A_2(x)) = \exists z \forall y \left(\left((z \leq y) + (y \leq x) + (A_1(y) = \overline{A_2(y)}) \right) \cdot ((z \leq x) + A_1(z) \cdot A_2(z)) \right). \quad (1.4)$$

Здесь мы предполагаем, что $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, в противном случае (1.4) даёт мантиссу суммы $\alpha_1 + \alpha_2$. Для формального определения предиката $A(x)$ достаточно просто приравнять (1.4) к $A(x)$.

Левая часть основного равенства (1.4) истинна тогда и только тогда, когда цифры, стоящие на x -м месте в α_1 и α_2 совпадают (обе равны 0 или 1). Правая часть равенства (1.4) истинна тогда и только тогда, когда сумма остатков у α_1 и α_2 после x -й позиции даёт ноль на x -ю позицию. Это реализуется в том и только том случае, если существует z , $z > x$, для которого соответствующие цифры в α_1 и α_2 обе равны 0, а сумма цифр всех промежуточных позиций y , $x < y < z$ (если они есть) равна 1.

Аналогично определяется сумма для остальных двух типов кодирования, а также для остальных арифметических операций. Мы не будем выводить соответствующие формулы ввиду их громоздкости.

Обратим внимание на то, что предикат суммы (1.4) имеет более сложное определение по сравнению со стандартным определением рекурсивного предиката через условие, содержащее только кванторы всеобщности. На первый взгляд кажется, что это просто вопрос удобства формулировки. Однако более подробный анализ показывает нерекурсивность предиката суммы двух вещественных чисел. Докажем, что характеристическая функция предиката суммы двух примитивно рекурсивных чисел в общем случае является арифметической функцией первого порядка, не являющейся ОРФ. Иными словами

задача суммирования двух примитивно рекурсивных чисел алгоритмически неразрешима.

Отметим, прежде всего, что задача определения тождественного равенства нулю произвольной ПРФ алгоритмически неразрешима. Действительно, если бы мы знали, является ли данная ПРФ тождественным нулём, то мы могли бы установить, даёт ли операция μ -обращения для некоторой произвольной ПРФ $z = f(x, y)$ при фиксированном z_0 некоторое значение y , удовлетворяющее $z_0 = f(x, y)$, либо обратная функция $y = g(x, z)$ не определена при $z = z_0$. Это означает, что мы могли бы осуществить рекурсивное доопределение произвольной ЧРФ, что противоречит доказанному выше.

Сумма двух чисел $\alpha_1 = 1/3 = 0.010101 \dots$ и $\alpha_2 = 1/6 = 0.0010101 \dots$ равна $\alpha_1 + \alpha_2 = 0.1000 \dots$. Выберем произвольную ПРФ $y = f(x)$ и видоизменим α_2 следующим образом: если $f(x) = 0$, то цифра на x -м месте α_2 остаётся неизменной, а если $f(x) \neq 0$, то соответствующая цифра меняется на противоположную. Тогда мы не будем знать, является ли сумма $1/3 + \alpha_2$ равна $1/2$, больше $1/2$ или меньше $1/2$. Соответственно, задача определения первой цифры, т.е. значения истинности $A(0)$ не выражима в ОРФ в зависимости от номера ПРФ.

Вместе с тем для произвольных α_1, α_2 мы можем сформулировать ЧРФ $y = f(x)$ область определения которой совпадает с множеством нулей для суммы $\alpha_1 + \alpha_2$. Отсюда следует, что предикат $A(x)$ суммы $\alpha_1 + \alpha_2$ является арифметическим 1-го порядка.

Полученный результат показывает, что АФ вовсе не являются некой экзотикой. Наоборот, уже простая операция сложения вещественных чисел приводит к АФ.

§2. Рекурсивные операции и функции

Факт нерекурсивности операции сложения требует более внимательного изучения. Сама по себе операция сложения как вещественная функция является непрерывной, т.е. малое изменение слагаемого влечёт малое изменение суммы. Проблема возникает из-за дискретности системы кодирования непрерывной функции: сколь угодно малое изменение слагаемого может изменить ситуацию в самом начале последовательности цифр. Эта ситуация неизбежна, если требовать взаимной однозначности вещественных чисел и предикатов. Однако, если отказаться от требования единственности представления вещественного числа, то операцию сложения можно представить примитивно рекурсивным предикатом.

Произвольное вещественное число α может быть представлено как некоторая последовательность 2^n -рациональных чисел, сходящаяся в себе. Разумеется, это представление неоднозначно. Отсюда возникает дополнительная трудность, связанная с определением равенства двух вещественных чисел α_1 и α_2 . Если при взаимно однозначном соответствии равенство $\alpha_1 = \alpha_2$ эквивалентно тождественному равенству соответствующих предикатов $\forall x (A_1(x) = A_2(x))$, то в данном случае этот вопрос потребует более сложной формулировки. Кроме того, представление вещественного числа в форме некоторой произвольной последовательности, сходящейся в себе, придётся выполнять через двухместный (а не одноместный) предикат.

Можно предложить следующий компромиссный вариант. Для представления числа α в двоичной системе вместо двух цифр 0 и 1 вводятся четыре: $-1, 0, 1, 2$.

Например, $2 - 1.01$ означает число $2 \cdot 2 - 1 + 2^{-2} = 13/4$. Произвольное число α представляется одноместным предикатом $A(x)$, где каждая цифра кодируется парой смежных значений x (чётным и нечётным x): $U, U \sim 0$, $U, \bar{U} \sim -1$, $\bar{U}, U \sim 1$, $\bar{U}, \bar{U} \sim 2$.

Поскольку у нас нет кода для двоичной точки, то произвольное α кодируется так: сначала идёт некоторое конечное число единиц (или ни одной), а затем обязательно цифра 0, после чего идёт произвольный набор цифр. Для восстановления числа α берём последовательность цифр, начиная с первого нуля, ставим двоичную точку после первого нуля и умножаем результат на 2^m , где m — число единиц перед первым нулём. Например, приведённое выше число запишется так: $1, 1, 0, 2, -1, 0, 1, 0, 0, 0 \dots$. Возможны и другие эквивалентные представления числа $13/4$:

$1, 1, 1, 0, 0, 2, -1, 0, 1, 0, 0, 0 \dots$ или $1, 1, 1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0 \dots$

Указанным способом можно записать любое вещественное число α , положительное и отрицательное, поскольку у нас есть цифра -1 .

Будем называть представление числа α нормализованным, если нет в последовательности ближайшей пары двоек 2, 2 и цифра -1 соседствует только с нулями: $0, -1, 0, \dots$

Определим процедуру нормализации представления числа α следующим образом. Процесс начинается с первого нуля последовательности цифр и продолжается до бесконечности (с соответствующими номерами цифр $i_0, i_0 + 1, i_0 + 2, \dots$).

Пусть k_i – цифра с номером i ($i \geq i_0$). Тогда выполняется одно из следующих преобразований:

$$k_i, 2, k_{i+2} \rightarrow k_i + 1, 0, k_{i+2}, \quad (2.1)$$

где k_i – произвольно, $k_{i+2} \geq 0$,

$$k_i, -1 \rightarrow k_i - 1, 1, \quad (k_i > 0), \quad (2.2)$$

$$k_i, 0, -1 \rightarrow k_i - 1, 1, 1 \quad (k_i > 0), \quad (2.3)$$

$$0, -1, -1 \rightarrow -1, 0, 1, \quad (2.4)$$

$$0, -1, 0, -1 \rightarrow -1, 0, 1, 1, \quad (2.5)$$

$$-1, 1, k_{i+2} \rightarrow 0, -1, k_{i+2} \quad (k_{i+2} > 0), \quad (2.6)$$

$$-1, 0, 2, k_{i+3} \rightarrow 0, -1, 0, k_{i+3} \quad (k_{i+3} \geq 0) \quad (2.7)$$

последовательно для $i = i_0, i_0 + 1, i_0 + 2 \dots$. Если текущая комбинация цифр не подпадает ни под один вариант из (2.1) – (2.7), то осуществляем переход от $i \rightarrow i + 1$, ничего не меняя. Если цифра 0, стоящая на месте $i = i_0$ изменилась на 1 или -1, то вставляем пару цифр 1, 0 на i_0 и $i_0 + 1$ места и сдвигаем всю остальную цепочку цифр на 2 позиции, восстанавливая тем самым наличие первого ноля.

Каждое из преобразований (2.1) – (2.7) не меняет величины α . Легко проверить, рассмотрев всевозможные комбинации цифр, что описанная процедура нормализует представление числа α .

Пусть два числа α_1 и α_2 имеют нормализованное представление. Вычислим их сумму $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ и нормализуем число α . Для этого временно введём ещё 3 цифры: 4, 3 и -2... Сложение α_1 и α_2 осуществим сложением цифр в каждом разряде

с учетом добавленных цифр. Предварительно согласуем позиции первых нолей i_1 и i_2 для представлений α_1 и α_2 добавлением пар 1, 0 так, чтобы $i_1 = i_2$.

Для выполнения нормализации α введём дополнительные к (2.1) – (2.7) правила преобразования с учётом появления новых цифр:

$$k_i, 4 \rightarrow k_i + 2, 0, \quad (2.8)$$

$$k_i, 3 \rightarrow k_i + 1, 1, \quad (2.9)$$

$$k_i, -2 \rightarrow k_i - 1, 0, \quad (2.10)$$

$$-1, 0, 3 \rightarrow 0, 0, -1. \quad (2.11)$$

Выполним процедуру нормализации для полученной в результате сложения последовательности цифр, а затем повторно проведём всю процедуру нормализации. Легко проверить, что в результате будет получена нормализованная последовательность, представляющая число α . Здесь следует учесть, что, поскольку представление чисел α_1 и α_2 является нормализованным то в исходном представлении числа α нет пар вида (4,4), (-2,-2), (-1,-2), (-2,-1). Поэтому после первой нормализации исчезают цифры 4 и -2, а цифра 3, хотя и может сохраниться, но отсутствуют пары вида 3,3 и 3,2. Повторная нормализация приводит α к нормализованному виду.

Операцию вычитания мы будем представлять как операцию алгебраического сложения, но для этого необходимо определить операцию смены знака у числа α . Пусть мы имеем нормализованное представление α . Тогда число $-\alpha$ запишем как исходную последовательность цифр со сменой знака $2 \rightarrow -2$, $1 \rightarrow -1$, $-1 \rightarrow 1$ (кроме стоящих в начале единиц).

Полученное представление $-\alpha$ нормализуется двумя последовательными процедурами нормализации. Здесь опять следует учесть, что в исходной последовательности нет пар вида $-2, -2$, поэтому после первой процедуры нормализации цифра -2 хотя и может встретиться, но только в конфигурации $0, -2, 0$ и недопустима конфигурация $-1, 0, -2, 0$.

Из определения операции алгебраического сложения и процедуры нормализации вытекает примитивная рекурсивность α относительно чисел α_1, α_2 . Это следует из того, что, в отличие от стандартного двоичного представления вещественных чисел, операции сложения и нормализации осуществляются без возвратов назад к уже полученным цифрам. В то время как неразрешимость операции сложения для стандартного представления обусловлена тем, что сколь угодно малые изменения вещественного числа α могут изменить цифры в самом начале последовательности. Правда, достигается искомая рекурсивность ценой потери однозначности представления вещественного числа.

Пусть имеется некая задача, связанная с нахождением вещественного числа α . Под решением такой задачи обычно подразумевается формулировка некоторой процедуры вычисления бесконечной последовательности чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, имеющей пределом искомое число α , причём сами числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, являются рекурсивными, т.е. их вычисление алгоритмически детерминировано.

Примерами таких процедур являются вычисление значений функций с помощью рядов, в частности, степенных рядов, в этом случае $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ – частичные суммы ряда, разного рода итерационные процессы и т.п. Отметим, что операции умножения и деления также сводится к процедуре вычисления

бесконечной суммы, в которой слагаемые с ростом номера убывают как 2^{-n} (при двоичном представлении чисел). Поэтому указанные процедуры вычисления $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \rightarrow \alpha$ в конечном счете, могут быть сведены к процедуре вычисления бесконечной суммы с рекурсивными слагаемыми. Однако один только факт сходимости ряда $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots \rightarrow \alpha$ недостаточен, чтобы сделать вывод о рекурсивности числа α . Для этого необходимо ещё знать число членов ряда для получения заданной точности, причём это число N должно быть ограничено некоторой ОРФ $N \leq f(n)$, где 2^{-n} – погрешность частичной суммы ряда $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_N$. Иными словами из рассмотрения должны быть исключены ряды с такой медленной сходимостью, что число членов ряда, необходимое для получения заданной точности, растёт быстрее любой ОРФ. Такие ряды являются математической экзотикой и не могут быть применимы для практических вычислений. Тем не менее, в целях строгости изложения, такая оговорка совершенно необходима.

Назовём рекурсивными такие вещественные числа, которые либо изначально могут быть записаны в стандартном двоичном представлении через рекурсивную функцию, либо через бесконечную сумму ряда рекурсивных чисел с указанным ограничением на сходимость. Аналогично определим примитивно рекурсивные вещественные числа. Выше было доказано, что сумма двух рекурсивных чисел в стандартном двоичном представлении не обязательно рекурсивна. В то же время нормализованное представление (с цифрами -1, 0, 1, 2) является рекурсивным. Покажем, что сумма ряда $\alpha = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$ имеет рекурсивное нормализованное представление.

Пусть $j_0, j_0 + j_1, j_0 + j_1 + j_2, \dots$ – частичные суммы ряда $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots$ такие, что остаточный член для j_0 не превосходит $1/4^2$: $|\alpha - j_0| < 1/4^2$, $|\alpha - j_0 - j_1| < 1/4^3, \dots$

$|\alpha - j_0 - j_1 - \dots - j_k| < 1/4^{k+2}$. Поскольку для получения заданной точности существует рекурсивная оценка на число членов ряда и сама операция суммирования рекурсивна, то j_0, j_1, j_2, \dots – рекурсивные числа. Для доказательства рекурсивности нам необходимо установить рекурсивность суммы $j_1 + j_2 + j_3 + \dots$, где $|j_k| < 5/4^{k+2}$. Отметим, что минимальное по абсолютной величине значения числа, представляемое нормализованной последовательностью с нулём на первом месте и значащей цифрой на втором равно $1/12$. Оно достигается для последовательности $0, -1, 0, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$ и равно $-1/12$. Поэтому, если абсолютная величина числа меньше $1/12$, то вторая цифра также 0. Нормализованное представление j_k содержит $2k$ нулей перед первой значащей цифрой.

Выполним теперь следующую процедуру. Вычислим сумму $j_1 + j_2$ с использованием вспомогательных цифр $4, 3, -2$, а затем проведём нормализацию со стартовым номером $i_0 = 2$ и повторную нормализацию со стартовым номером $i_0 = 3$. Затем полученный результат сложим с j_3 (с использованием вспомогательных цифр $4, 3, -2$) и опять проведём две повторные нормализации со стартовыми номерами $i_0 = 4$ и $i_0 = 5$ и т.д. Нетрудно проверить, что для суммы $j_1 + j_2 + \dots + j_k$, вся последовательность будет содержать только цифры $-1, 0, 1, 2$ и последовательность с номерами $2k, 2k+1, 2k+2, \dots$ является нормализованной (т.е. нет пар $2, 2$ и -1 соседствует только с нолями). Построенная процедура суммирования $j_1 + j_2 + j_3 + \dots$ является примитивно рекурсивной относительно рекурсивных чисел j_1, j_2, \dots . Это вытекает из того, что по ходу суммирования $j_1 + j_2 + \dots + j_k$ в полученной последовательности цифр $-1, 0, 1, 2$ все цифры с номерами от 1 до $2k-1$ остаются неизменными при учёте последующих слагаемых. После вычисления всей суммы $j_1 + j_2 + j_3 + \dots$ с полученной последовательностью цифр

–1,0,1,2 проводится ещё одна процедура нормализации, начиная с номера $i_0 = 1$. Затем окончательно вычисляем сумму $\alpha = j_0 + j_1 + j_2 + \dots$ и еще раз проводим процедуру нормализации, ч.т.д.

Таким образом, все «обычные» вычисления с алгоритмически детерминированными операциями над бесконечными последовательностями и рядами, записанные через элементарные функции, дают рекурсивные предикаты.

Возникает, однако, вопрос, зачем была введена специфическая и достаточно громоздкая конструкция нормализованного представления чисел. Для ответа на этот вопрос обратим внимание на принципиальное различие между стандартным однозначным и многозначным представлением числа. Произвольная формула, содержащая вещественные числа, в конечном итоге сводится к сравнению одной или нескольких пар чисел, т.е. к ответу на вопрос равно одно число другому или нет, а если нет, то больше или меньше. Пусть два рекурсивных числа α_1 и α_2 ($0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$) записаны в стандартной двоичной форме и $A_1(x), A_2(x)$ – соответствующие им предикаты. Тогда процедура сравнения этих чисел сводится к поочерёднему сравнению цифр двоичного представления α_1 и α_2 , а условие неравенства $\alpha_1 < \alpha_2$ запишется так:

$$\exists x A_1(x) \cdot \overline{A_2(x)}. \quad (2.12)$$

Условие равенства имеет вид:

$$\forall x (A_1(x) = A_2(x)) \quad (2.13)$$

Хотя в целом поставленная задача может оказаться неразрешимой, но неравенства $\alpha_1 < \alpha_2$ и $\alpha_2 < \alpha_1$ доказуемы, т.е. задача сводится к вычислению значения ЧРФ.

Если же числа α_1, α_2 представлены просто некой сходящейся в себе последовательностью, то условия (2.12), (2.13) превращаются в формулы, содержащие разнородные кванторы. При этом неразрешимой может оказаться задача сравнения любой пары цифр, начиная с первой. Дело в том, что, когда мы отказались от однозначного представления чисел, чтобы избежать неразрешимости арифметических операций, то проблема не исчезла, а лишь сместилась в неразрешимость сравнения двух чисел.

Пусть α_1 и α_2 имеют нормализованное представление. Задача их сравнения сводится к сравнению величины $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ с нулём. Вычислим разность $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ и выполним процедуру нормализации. Легко видеть, что единственно возможное нормализованное представление нуля – это бесконечная последовательность $0, 0, 0, \dots$. Действительно, возможные альтернативные конфигурации нуля в ненормализованной форме:

$$0 = 0, 0, \dots, 0, -1, 1, 1, 1, \dots, 1, 2, 0, 0, 0, \dots,$$

$$0 = 0, 0, 0, \dots - 1, 1, 1, 1, \dots,$$

$$0 = 0, 0, 0, \dots - 1, 0, 2, 2, 2, \dots,$$

$$0 = 0, 0, 0, \dots, 1, -1, -1, -1, \dots$$

недопустимы в нормализованной форме. При этом, если первая значащая цифра нормализованного представления -1, то всё число отрицательно, а если 1 или 2, то всё число положительно. Отсюда следует, что вся процедура сравнения нормализованных чисел эквивалентна процедуре сравнения в стандартном двоичном представлении.

§3. Функции вещественной переменной

Изначально понятие функции в анализе связывалось с некоторой вычислительной процедурой, которая позволяет, исходя из значений одного или нескольких значений вещественных чисел (аргументов), получать результирующее число – значение функции. При этом неявно подразумевалась алгоритмическая детерминированность процедуры, правда, без определения понятия алгоритма. Более строго эту идею можно сформулировать следующим образом. Пусть α вещественное число, представляемое натуральной функцией $y = f_\alpha(x)$ натуральной переменной x , и $\varphi_f(x)$ – рекурсивная относительно $f_\alpha(x)$ функция. Тогда число β , представляемое последовательностью $\varphi_f(0), \varphi_f(0'), \varphi_f(0''), \dots$ является значением некоторой функции $\beta = \varphi(\alpha)$, которую будем называть рекурсивной функцией вещественной переменной. Из результатов предыдущего параграфа следует, что все «обычные» алгоритмически детерминированные вычислительные процедуры с упомянутым ограничением на скорость сходимости являются рекурсивными функциями $\beta = \varphi(\alpha)$.

Для произвольной рекурсивной функции можно записать метаопределение в виде некоторой формулы φ формализма I_N^1 , содержащей переменный предикат $A(x)$, обозначающий число α . Это следует из материалов главы 3.

Математический анализ, однако, базируется на более общем определении понятия функции как множества упорядоченных пар $\langle \alpha, \beta \rangle$. Рассмотрим возможность представления произвольной функции $\beta = \varphi(\alpha)$ в I_N^1 . Прежде всего, следует отметить, что множество функций, удовлетворяющих данному определению, имеет более высокую мощность, чем континуум, и потому не выразимо в I_N^1 . Более того, уже множество областей

определения указанных функций (а это множество всех подмножеств континуума) имеет более высокую по сравнению с континуумом мощность. Тем не менее, это обстоятельство не создаёт значимых проблем, поскольку на практике рассматривается гораздо более узкий класс функций.

Определим следующий класс функций, которые назовём допустимыми, а их области определения X также будем называть допустимыми.

1. Конечное или бесконечное счётное множество точек на действительной оси с произвольными значениями функции $\varphi(\alpha)$ на них образуют допустимую функцию. При этом бесконечная последовательность точек может состоять только из изолированных точек, иметь одну, несколько или бесконечное число точек сгущения, а также области, где точки образуют всюду плотное подмножество.

2. Непрерывная функция, заданная на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, является допустимой.

3. Бесконечная последовательность попарно непересекающихся отрезков за исключением, быть может, их концов образует допустимую область X . Непрерывная на X функция $\varphi(\alpha)$ является допустимой. Отсюда следует, что функции непрерывные на интервале, полуинтервале, в том числе, на полубесконечном, а также на всей оси, являются допустимыми.

4. Функция $\varphi(\alpha)$, полученная объединением двух допустимых функций $\varphi_1(\alpha)$ и $\varphi_2(\alpha)$ с областями X_1 и X_2 является допустимой на $X_1 \cup X_2$, причём значения $\varphi(\alpha)$ в точках пересечения X_1, X_2 (если они есть) совпадают с $\varphi_1(\alpha)$.

5. Если у допустимой функции $\varphi(\alpha)$ на X урезается область определения до $X - X_1$, где X_1 – допустимая область, то $\varphi(\alpha)$ остаётся допустимой.

6. Если бесконечная последовательность допустимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ заданных на X , имеет предел $\varphi(\alpha)$ на множестве $\alpha \in X_{lim}$, $X_{lim} \subset X$, то $\varphi(\alpha)$ – допустимая функция.

Допустимые функции, учтённые в п.п.1-5, охватывают все функции, которые мы можем реально представить себе и «конструктивно» построить. Например, функция Дирихле $\beta = \delta(\alpha)$, равная 1 во всех рациональных точках и равная 0 в иррациональных, строится так. Из области определения функции, тождественно равной 0, вычитается допустимая область, состоящая из всех рациональных точек. Затем эта функция объединяется с функцией, тождественно равной 1 на всей оси. Поэтому пункт 6 кажется лишним. Однако предельная область X_{lim} может иметь весьма сложную конфигурацию, которую невозможно себе представить и «сконструировать» рациональными средствами. Это вытекает из алгоритмической неразрешимости задачи определения X_{lim} . Тем не менее такие функции представимы в I_N^1 и учитываются нами.

Возможность записать допустимую функцию в форме переменного предиката $A(x)$ в I_N^1 , на который наложено некоторое определяющее условие χ_A , вытекает из следующих двух обстоятельств.

1. Значения непрерывной на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ функции полностью определяются значениями функции на всюду плотном счётном подмножестве $[\alpha_1, \alpha_2]$. В нашем случае в качестве такового выбрано множество 2^n – рациональных чисел.

2. Пусть имеется последовательность функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, которые могут быть представлены предикатами $A_0(x), A_1(x), A_2(x), \dots$. Тогда вся последовательность может быть представлена предикатом $A(x, t)$, где $A(x, 0) = A_0(x), A(x, 0') = A_1(x), A(x, 0'') = A_2(x), \dots$

Легко видеть, что множество допустимых функций имеет мощность континуума, и условия, сформулированные в п.п. 1-6, выразимы в I_N^1 . Действительно, функции, определяемые в п.1, могут быть заданы предикатом $A(x, t)$, где t – нумерует точки множества X , а $A(x, 0), A(x, 0') \dots$ – значения функции в соответствующих точках.

Непрерывная на $[\alpha_1, \alpha_2]$ функция может быть задана предикатом $A(x, t)$, где t нумерует 2^n – рациональные точки, на которые наложено условие $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Бесконечные последовательности в п. 3 и п. 6 могут быть учтены дополнительным параметром – переменной, нумерующей члены последовательности. Условия в п. 4 и п. 5 также выразимы в I_N^1 .

Обратим внимание на следующий момент. Если функция непрерывна на отрезке, то она непрерывна и на всюду плотном подмножестве. Поэтому непрерывная функция определяется значениями на всюду плотном подмножестве. Обратное неверно. Функция может быть непрерывна на плотном подмножестве отрезка и разрывна в некоторых точках отрезка вне подмножества. Однако, если функция равномерно непрерывна на плотном подмножестве отрезка, то она может быть однозначно доопределена до равномерно непрерывной функции на всём отрезке. Учтём ещё, что по теореме Кантора, если функция непрерывна на отрезке, то она равномерно непрерывна на нём.

Поэтому требование равномерной непрерывности на плотном подмножестве равносильно требованию непрерывности на отрезке. (Примером функции непрерывной во всех рациональных точках, но разрывной на действительной оси может служить функция $\beta = 1/(\alpha - \pi)$).

Следует также помнить о принципиальной разнице предикатов, определяющих функции вещественной переменной, и индивидуальных предикатов гл.3. Если индивидуальные предикаты определяются однозначно соответствующим условием χ , то аналогичные условия χ для предикатов допустимых функций оставляют континуум возможных реализаций, поскольку содержат переменные предикаты, играющие роль аргументов функции.

§4. Представление теорем анализа

Рассмотренные выше методы построения вещественных чисел и функций вещественной переменной позволяют перейти к формулировке теорем анализа в формализмах I_N^Z и I_N^1 . Мы ограничимся лишь несколькими примерами, иллюстрирующими принципиальную возможность такого представления, поскольку даже краткое изложение анализа в данных формализмах выходит далеко за пределы настоящей работы.

Начнем с теоремы о том, что ограниченная монотонно неубывающая последовательность имеет предел. Рассмотрим для простоты представление числа α ($0 \leq \alpha \leq 1$) в виде последовательности цифр 0 и 1, соответствующих значениям предиката $A(x)$ равным $A(x) = U$ и $A(x) = \bar{U}$, в двоичной системе и точкой перед первой цифрой. При этом не будем требовать однозначности представления числа (т.е. 2^n -рациональному числу соответствует 2^n представлений, кроме

$\alpha = 1$ и $\alpha = 0$, а всем остальным – единственное), и каждому предикату $A(x)$ соответствует единственное число α . Отношение неравенства двух чисел $\alpha_1 > \alpha_2$ запишется следующим образом:

$$\Psi_{<}(A_1, A_2) = \exists p, q, \forall r \left[(\overline{r < p} + (A_1(r) = A_2(r))) \cdot \overline{A_1(p)} \cdot A_2(p) \cdot (\overline{A_1(q)} + A_2(q)) \cdot (p < q) \right], \quad (4.1)$$

где $A_1(x)$, $A_2(x)$ – предикаты, представляющие α_1, α_2 .

Легко проверить, что условие (4.1) является необходимым и достаточным для отношения $\alpha_1 > \alpha_2$, поэтому неравенство $\alpha_1 \leq \alpha_2$ определяется отрицанием $\overline{\Psi_{<}(A_1, A_2)}$.

Для дальнейшего нам потребуется также условие, что две величины α_1 и α_2 сколь угодно мало отличаются друг от друга:

$$\Psi_E(A_1, A_2) = \exists p \forall r \left((\overline{r < p} + (A_1(r) = A_2(r))) \cdot (\overline{A_1(p)} = A_2(p)) \cdot (\overline{p < r} + \overline{r \leq t} + (A_1(r) = \overline{A_1(p)}) \cdot (A_2(r) = \overline{A_2(p)})) \right) + \forall q (A_1(q) + A_2(q)). \quad (4.2)$$

Если выполнено условие (4.2), то

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 2^{-t}, \quad (4.3)$$

и, наоборот, из (4.3) следует (4.2).

Произвольная последовательность вещественных чисел $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \dots$ может быть представлена предикатом $B(x, p)$: $\beta_0 \sim B(x, 0)$, $\beta \sim B(x, 0')$, ... Условие неубывания членов последовательности $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \dots$ имеет вид:

$$\forall p \overline{\Psi_{<}(B(p), B(p'))}, \quad (4.2)$$

где предикат $A_1(x)$ заменён на $B(x, p)$, а $A_2(x)$ на $B(x, p')$. Ограниченность последовательности $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ вытекает из самой системы кодирования $B(x, p)$.

Обозначим предел последовательности $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots \rightarrow j$ предикатом $C(x)$. Тогда теорема существования предела $\beta_0, \beta_1, \dots \rightarrow j$ запишется так:

$$\exists p \Psi_{<}(B(p), B(p')) + \exists C \forall t \exists v \forall q (\overline{v \leq q} + \Psi_E(B(q), C, t)). \quad (4.5)$$

Сформулируем условие непрерывности функции. Ограничимся отрезком $[0, 1]$ и прежней системой кодирования вещественных чисел в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 1$. Занумеруем все 2^n – рациональные числа – абсциссы отрезка $[0, 1]$ в следующем порядке:

$$0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, \dots \quad (4.6)$$

Произвольная функция $\beta = \beta(p)$, заданная на множестве (4.6), $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ – номер абсциссы, и принимающая вещественные значения $0 \leq \beta \leq 1$, может быть задана предикатом $\mathcal{F}(x, p)$, где $\mathcal{F}(x, 0), \mathcal{F}(x, 0') \dots$ – значения функции $\beta(0), \beta(1), \dots$ в нашей системе кодирования. Зададимся индивидуальным предикатом $D(p, q, r)$, соответствующим неравенству

$$| \alpha_p - \alpha_q | \leq 2^{-r}, \quad (4.7)$$

где α_p, α_q – значения абсцисс (4.6) с номерами p и q . Мы не будем явно выписывать определяющее условие Ψ_D для предиката $D(p, q, r)$, отметим лишь, что он является примитивно рекурсивным. Тогда условие равномерной непрерывности $\mathcal{F}(x, p)$ на множестве (4.6) имеет вид:

$$\Psi_V(\mathcal{F}) = \forall t \exists r \forall p, q, \left(\overline{D(p, q, r)} + \Psi_E(\mathcal{F}(p), \mathcal{F}(q), t) \right). \quad (4.8)$$

Обратим внимание на очерёдность кванторов $\exists r \forall p, q$, соответствующую равномерной непрерывности. Простой непрерывности соответствует $\forall p, q \exists r$.

Функция, заданная на множестве (4.6) и удовлетворяющая (4.8) однозначно определяет непрерывную функцию на $[0,1]$, и наоборот, произвольная непрерывная на $[0,1]$ функция удовлетворяет (4.8).

Условие дифференцируемости функции может быть записано аналогичным образом. Ввиду громоздкости выкладок мы не будем останавливаться на его выводе.

Если функция непрерывна на отрезке, то никакого дополнительного условия её интегрируемости не требуется.

Таким образом, мы можем формализовать в I_N^Z все задачи, содержащие перечисленные операции для вещественных переменных и непрерывных функций, заданных на отрезке. Произвольная допустимая функция может быть получена из счётного числа непрерывных на отрезке функций, как это следует из её определения, п.п. 3,6. Для формализации допустимой функции достаточно дополнить предикат $\mathcal{F}(x, p)$ ещё одним параметром, перечисляющим отрезки области определения функции (согласно п.3), или функции последовательности (согласно п.6).

Наряду с понятиями вещественного числа и функции в анализе широко используются понятия оператора и функционала. При этом, если для характеристики числа и функций часто применяется термин «произвольное» с некоторыми уточняющими условиями, например, произвольное

положительное число, произвольная непрерывно дифференцируемая функция, то операторы и функционалы обычно выступают как индивидуальные, т.е. заданные определённым образом. По-существу, всё множество рассматриваемых операторов сводится к следующему. Имеем:

1. Два взаимно обратных оператора интегрирования и дифференцирования.

2. Оператор простой функциональной связи $j = \widehat{D}\beta$, означающий $j(\alpha) = \delta(\beta(\alpha))$.

Упомянутое множество состоит из всевозможных произведений (с любым числом сомножителей) операторов п.п. 1,2. То же самое относится к функционалам с единственным дополнением: наряду с линейными интегральными функционалами рассматриваются пределы последовательностей таких функционалов, определяемые как обобщенные функции.

Характерными задачами анализа являются задачи на отыскание вещественных чисел (корни уравнений, спектры собственных значений и т.п.) или функций (интегральные и дифференциальные уравнения, собственные функции и т.п.). При формулировке этих задач в I_N^Z предикаты, соответствующие искомым функциям и числам, оказываются связанными квантором существования.

В то же время аналогичные задачи для операторов и функционалов не характерны для анализа. Тем не менее, для полноты картины упомянем и такую возможность. Рассмотрим произвольный оператор \widehat{R} : $j = \widehat{R}\beta$, $j = j(\alpha)$, $\beta = \beta(\alpha)$, действующий на вещественные функции на единичном отрезке: $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq j \leq 1$. Ограничимся сначала произвольными вещественными функциями $\beta(\alpha)$, $j(\alpha)$,

заданными на множестве 2^n -рациональных чисел $0 \leq \alpha \leq 1$, и построим произвольный оператор, действующий на множестве таких функций. Пусть предикат $R(x, p, r, t)$ для произвольных фиксированных t ($t = 0, 1, 2, \dots$), r , $0 \leq r \leq q^t$, $q = 2^t + 1$ имеет смысл вещественной функции $j_t^r(\alpha)$ заданной на множестве 2^n -рациональных чисел с системой кодирования, описанной выше для $\mathcal{F}(x, p)$.

Параметры t и r означают следующее. Разобьем отрезки $[0, 1]$ на осях абсцисс и ординат на 2^t равных отрезка и рассмотрим всевозможные функции, заданные на множестве $q = 2^t + 1$ абсцисс ($\alpha = 0, 2^{-t}, \dots, 1$) и принимающие одно из q значений. Всего таких функций q^q . Упорядочим все эти функции некоторым способом, например, лексикографически, и положим, что r нумерует все эти функции. Таким образом, произвольной функции с областью определения и областью изменения состоящей из r элементов сопоставлена функция $j_t^r(\alpha)$.

Произвольная вещественная функция $\beta(\alpha)$, заданная на множестве 2^n - рациональных чисел, может быть представлена как предел последовательности указанных функций, определённых для q значений α . Наложим на предикат $R(x, p, r, t)$ следующее условие. Если для произвольной последовательности r_0, r_1, r_2, \dots значений r , соответствующих $t = 0, 1, 2, \dots$, функций $\beta_0(\alpha), \beta_1(\alpha), \beta(\alpha), \dots$, заданные для $q_0 = 2, q_1 = 3, q_2 = 5, \dots$ значения α , имеют своим пределом функцию $\beta(\alpha)$ на множестве 2^n - рациональных чисел, то и последовательность функций $j_t^{r_t}(\alpha)$ также имеет предел $j(\alpha)$. Данное условие определяет произвольный оператор \hat{R} , заданный для функций, определённых на множестве 2^n -рациональных чисел.

Если же мы хотим определить произвольный оператор \hat{R}_C на континууме $[0,1]$, то следует иметь в виду, что множество таких операторов имеет мощность выше континуума. Поэтому, по аналогии с функциями, нам следует ввести понятие допустимого оператора и рассматривать множество операторов \hat{R}_C с соответствующими ограничениями. В частности, можно рассмотреть множество непрерывных операторов для функций на $[0,1]$. В этом случае для доопределения оператора \hat{R} , заданного предикатом $R(x, p, r, t)$, и соответствующих функций $\beta(\alpha), j(\alpha)$ на континууме $[0,1]$ мы должны потребовать равномерной непрерывности функций $\beta(\alpha)$ и $j(\alpha)$, а также равномерной непрерывности самого оператора \hat{R} . Последнее означает, что малое изменение функции $\beta(\alpha)$ должно вызывать равномерно малое изменение функции $j(\alpha)$.

Аналогичные построения можно реализовать и для произвольных функционалов.

Ниже будет построена нефинитная разрешающая процедура для множества формул исчисления I_N^Z , однако наиболее удобный вид процедура принимает для формул исчисления I_N^1 . В то же время основная масса задач анализа содержит в своей формулировке предикаты, связанные квантором существования (\exists - предикаты). Это задачи, связанные с нахождением неизвестных величин, функций и т.п., а также разнообразные теоремы существования. Наличие \exists - предикатов в формулировке такого рода задач представляется неизбежным и неустранимым фактором, однако это не так. Хотя между вещественными числами и одноместными предикатами на N существует взаимно однозначное соответствие, в содержательном смысле понятия индивидуального предиката и числа различны. Для задания произвольного вещественного числа достаточно построить

любую сходящуюся в себе последовательность рациональных чисел. При этом мы можем произвольно изменить несколько первых чисел последовательности без изменения результата. Наоборот, для индивидуного предиката (например, $D(x, y), x \leq y$) важны все его значения.

Это означает, что задачу, связанную с существованием вещественного числа, можно переписать как задачу существования сходящейся в себе последовательности. Поясним сказанное. Любое вещественное число α можно заменить сходящейся последовательностью вида $p_0, \frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{4}, \frac{p_3}{8}, \dots$, где p_0, p_1, p_2, \dots – целые числа. Поэтому формулу вида $\exists C\Phi(C)$, где C – предикат вещественного числа, можно заменить конструкцией $\forall t \exists p \Phi_m$ с соответствующей модификацией $\Phi(C)$, выражающейся в том, что представленное вместо $C(x)$ число $p_t/2^t$ может отличаться от точного значения $C(x)$ не более, чем на 2^{-t} .

В качестве примера выберем рассмотренную выше теорему о существовании предела для ограниченной монотонной последовательности. Предварительно определим предикат $T(x, r, t)$, осуществляющий перевод числа $r/2^t$ в двоичную систему кодирования: для произвольных r и t предикат $T(x, r, t)$ представляет дробную часть числа $r/2^t$ в приведённой выше системе кодирования для вещественных чисел $0 \leq \alpha \leq 1$ с помощью одноместных предикатов $A(x)$. Определяющее условие для индивидуного предиката $T(x, r, t)$ таково:

$$\begin{aligned} \Psi_T = \forall x, r, t \Big(& T(x, r, 0) \cdot (T(x', r, t') = T(x, r, t)) \cdot \\ & (T(t, r', t) = T(t, r, t)) \cdot (\overline{x < t} + (T(x', r, t) \cdot T(x', r', t) = \\ & (T(x, r', t) = \overline{T(x, r, t)}))) \Big). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Роль предиката $C(x)$ в (4.5), выражающего предел j последовательности $B(x, p)$, теперь будет играть предикат $T(x, r, t)$, выражающий 2^n -рациональное число, сколь угодно близко приближающееся к j :

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_T} + \exists p \Psi_{<}(B(p), B(p')) + \forall t \exists r, v \forall q (\overline{v \leq q} + \\ \Psi_E(B(q), T(r, t), t)). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Заменяя квантор $\exists C$ на конфигурацию $\forall t \exists r$, получаем формулу (4.10) исчисления I_N^1 .

Если квантором существования связан предикат допустимой функции, то следует иметь в виду, что эта функция задаётся совокупностью значений на счётном множестве (с последующим доопределением на континуум). В этом случае каждое значение функции заменяется последовательностью 2^n -рациональных чисел. В ходе такой замены нужно ясно понимать, что на что заменяется, чтобы не допустить ошибки. Поясним сказанное на примере.

Функция $\beta = \sin \alpha / (\pi - \alpha)$ определена на всей оси, кроме $\alpha = \pi$, и имеет предел $\beta \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow \pi$. Если мы имеем в виду вычисление именно самой функции при $\alpha = \pi$, а не её предела при $\alpha \rightarrow \pi$, то сходящиеся в себе последовательности строятся так. Сначала вычисляем значение $\sin \alpha$ через последовательность 2^n -рациональных чисел, стремящуюся к π . Затем вычисляем

значение функции $\pi - \alpha$ также через последовательность, имеющую пределом π , при этом получаем в пределе 0. Далее при вычислении значения дроби j/δ при $\delta = 0$ приходим к выводу, что функция j/δ не определена, а значит, и вся функция $\sin \alpha / (\pi - \alpha)$ не определена при $\alpha = \pi$. В то же время неправильно было бы рассматривать замену α на сходящуюся в себе последовательность 2^n -рациональных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \rightarrow \pi$ с последующим вычислением предела для всей функции $\beta_p = \sin \alpha_p / (\pi - \alpha_p)$ при $p \rightarrow \infty$. В этом случае мы решаем не поставленную задачу вычисления функции в точке, а находим предельное значение функции. Этот пример показывает необходимость внимательного отслеживания чередования кванторов в процессе исключения \exists -предикатов.

Описанная процедура замены вещественного числа последовательностью 2^n -рациональных чисел позволяет исключить все \exists -предикаты, а с предикатов, связанных квантором всеобщности, он просто снимается с сохранением дедуктивной эквивалентности. Таким образом, задачи и теоремы анализа могут быть преобразованы к формулам исчисления I_N^1 .

§5. Разрешающая процедура для ОНФС 1-го порядка

В главе 3 было доказано, что теория, состоящая из формул I_N^1 , содержащих только рекурсивные индивидные предикаты, и в которых все предметные переменные связаны квантором существования, неразрешима в ОРФ, но её истинные высказывания рекурсивно перечислимы, т.е. теория разрешима в ЧРФ. Рассмотрим более общий случай теории, содержащей все формулы I_N^1 без ограничений на предикаты (т.е. с произвольными переменными предикатами), но все предметные переменные

связаны квантором существования. Докажем, что и у этой более общей теории все истинные формулы рекурсивно перечислимы. Пусть в формуле общего вида

$$\exists x \Phi_0^1(\bar{A}, x), \quad (5.1)$$

где Φ_0^1 – произвольная бескванторная формула I_N^1 , k – максимальное число штрихов, которое встречается у переменных x в Φ_0^1 . Рассмотрим бесконечную последовательность конечных областей $\{0\}, \{0, 0'\}, \{0, 0', 0''\} \dots$, которые обозначим M_1, M_2, M_3, \dots . На каждой из областей зададим всевозможные наборы предикатов \bar{A} . Если для некоторой области M_{k+n} ($n = 1, 2, 3, \dots$) при любом наборе предикатов \bar{A} на M_{k+n} существует набор значений $x_1 < n, x_2 < n, \dots$ переменных из x , удовлетворяющих (5.1), то формула (5.1) будет истинна для любого другого множества, содержащего M_{k+n} , в том числе, и всего множества натуральных чисел N .

Совсем не так очевидно обратное утверждение: если формула истинна на N , то она истинна и на некотором конечном множестве. Действительно, априори можно предполагать, что на любом конечном множестве M_{k+n} всегда остаются некоторые предикаты, для которых не существует набора x , удовлетворяющего (5.1). При этом каждый из оставшихся предикатов рано или поздно «выйдет из игры», но вместо них появятся новые.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим отрицание (5.1):

$$\exists \bar{A} \forall x \overline{\Phi_0^1(\bar{A}, x)}, \quad (5.2)$$

истинное тогда и только тогда, когда (5.1) ложно. Если формула (5.2) истинна на N или M_{k+n} , то она истинна и любом меньшем

конечном множестве M_{k+m} ($m \leq n$), поскольку при этом переходе просто уменьшается число сомножителей, соответствующих $\forall x$.

Рассмотрим последовательность множеств $M_k, M_{k+1}, \dots, M_{k+n}$ и всевозможные наборы предикатов \bar{A} , удовлетворяющие (5.2) для каждого из указанных множеств. Эти наборы образуют дерево, поскольку каждому такому набору $\{\bar{A}\}_{m,i}$ на множестве M_{k+m} ($m \leq n$) соответствует набор «урезанных» предикатов на $M_{k+m-1}, M_{k+m-2}, \dots$, удовлетворяющих (5.2). С ростом n некоторые ветви этого дерева могут обрываться, т.к. не существует никакого продолжения предикатов $\{\bar{A}\}_{n,i}$ на множество M_{k+n+1} , а другие иметь продолжение. С ростом n возможны два варианта: процесс обрывается на некотором $n = n_0$ так, что ни у одной ветви дерева нет продолжения на M_{k+n_0+1} , либо процесс неограниченно продолжается. В последнем случае на дереве существует, по крайней мере, одна бесконечная траектория, которая определит набор предикатов \bar{A} на N , удовлетворяющих (5.2). Если же процесс оборвался на $n = n_0$, то это означает истинность (5.1) на M_{k+n_0+1} , а это значит, и на N . Последовательной проверкой всех наборов предикатов \bar{A} на M_k, M_{k+1}, \dots через конечное число шагов будет найдено значение n_0 и доказана истинность (5.1).

Рассмотрим теперь множество формул I_N^Z , содержащих условие счётности Γ_N и приводимых к ОНФС 1-го порядка:

$$\exists \bar{B} (\exists x \Phi_1(\bar{A}, \bar{B}, x) \cdot \forall y \Phi_2(\bar{A}, \bar{B}, y)). \quad (5.3)$$

Данное множество формул содержит, в том числе, все формулы I_N^1 , т.к. они могут быть выражены в I^Z , и имеют вид:

$$\exists B^1, B^n (\exists x B^n(x) \cdot \forall y \Phi(\bar{A}, B^1, B^n, y)), \quad (5.4)$$

т.е. содержат только 2 предиката, связанных квантором существования, из которых один – одноместный, и формула $\Phi_1(\bar{A}, \bar{B}, x)$ в (5.3) является просто вторым предикатом.

Построим разрешающую процедуру для множества формул (5.3), разумеется, нефинитную, поскольку уже множество формул I_N^1 неразрешимо даже в $A\Phi$, как это было доказано в главе 3. Подчеркнём еще раз, что (5.3) не охватывает все формулы I^Z с ОНФС 1-го порядка, поскольку внутри (5.3) «спрятано» условие счетности. Это означает, что нам достаточно рассмотреть формулы (5.3) на счётном множестве, а на всех остальных множествах формулы (5.3) заведомо истинны.

Полное число всевозможных k -местных предикатов $A(x_1, \dots, x_k)$ на конечном множестве M_n , содержащем n элементов $\{0, 0', 0'', \dots, 0^{(n-1)}\}$ равно $C = 2^{n^k}$. Полное число всевозможных наборов предикатов $\bar{A} = (A_1, \dots, A_\ell)$ в (5.3) на множестве M_n равно произведению чисел C_i отдельных предикатов A_i , входящих в \bar{A} . Каждый предикат на M_n является продолжением некоторого предиката на M_{n-1} . Построим дерево T_A всевозможных наборов предикатов \bar{A} на N , при этом на 1-м уровне, соответствующем $M_1 = \{0\}$, имеем 2^ℓ вершин дерева. Для простоты будем считать, что все они соединены с общим корнем на нулевом уровне. Тогда произвольному набору предикатов \bar{A} , заданных на N , взаимно однозначно соответствует некоторая бесконечная траектория на данном дереве T_A .

Аналогично набору предикатов \bar{B} в (5.3) соответствует дерево T_B . Зафиксируем произвольно выбранную траекторию t_A на дереве T_A и траекторию t_B на T_B . Рассмотрим последовательность формул $\exists x \Phi_1(\bar{A}, \bar{B}, x)$ (5.3) на траектории t_B (при фиксированной t_A) в вершинах дерева, соответствующих

множествам M_1, M_2, M_3, \dots , на которых заданы предикаты \bar{A}, \bar{B} . Тогда, если на некотором уровне n_1 ($n_1 = 1, 2, 3, \dots$) формула $\exists x \Phi_1(\bar{A}, \bar{B}, x)$ оказалась истинной, то она останется истинной и для всех последующих n , $n \geq n_1$. Наоборот, если формула $\forall y \Phi_2(\bar{A}, \bar{B}, y)$ оказалась ложной на некотором уровне n_2 (а до этого при $n < n_2$ была истинной), то она будет ложной и для всех n , $n \geq n_2$.

Для произведения

$$\exists x \Phi_1(\bar{A}, \bar{B}, x) \cdot \forall y \Phi_2(\bar{A}, \bar{B}, y) \quad (5.5)$$

возможны следующие варианты. Уровень n_1 не существует – (5.5) ложно на всей траектории. Пусть n_1 существует, тогда варианты таковы. Уровень n_2 не существует – (5.5) истинно для всех n , $n \geq n_1$, единственный вариант, когда (5.5) истинно на N . Уровень n_2 существует. Тогда (5.5) истинно для n , $n_1 \leq n < n_2$, если $n_1 < n_2$, и ложно для всех n , если $n_1 \geq n_2$.

При фиксированной траектории t_A формула (5.3) истинна на N тогда и только тогда, когда существует траектория t_B , для которой n_1 существует, а n_2 – нет. Наша задача теперь сводится к определению условий существования такой траектории t_B . Рассмотрим последовательность формул (5.3) на множествах M_1, M_2, M_3, \dots , соответствующих движению по траектории t_A . Может показаться, что, если, начиная с некоторого $n = n_1$, $n = n_1 + 1$, $n = n_1 + 2$, ..., формула (5.3) истинна, то она истинна и на N . Однако это не так. Возможна ситуация, когда на разных ветвях дерева T_B имеются конечные отрезки $n_{1,i} \leq n < n_{2,i}$ такие, что они сплошь покрывают все значения n от некоторого $n_{1,0}$ до бесконечности, и при этом нет ни одной траектории t_B , на которой n_1 существует, а n_2 – нет.

Таким образом, ситуация на N может не совпадать с предельной ситуацией для M_1, M_2, M_3, \dots . Этим рассматриваемая задача принципиально отличается от задачи (5.1), для которой построена бесконечная процедура на последовательности конечных множеств, и ответ зависит от того, оборвётся эта процедура на конечном шаге или нет. В последнем случае предельный результат совпадает с результатом для N . Отметим, кстати, что при доказательстве теоремы Гёделя о полноте (доказуемости и рекурсивной перечислимости истинных формул I^1) возникает та же ситуация. Строится бесконечная процедура на возрастающих конечных множествах, и, если она обрывается на конечном шаге, то формула I^1 истинна, а если нет, то истинно отрицание формулы. При этом соответствующие предикаты на N строятся как предел последовательности некоторых предикатов на конечных множествах.

Невозможность определить значение истинности (5.3) для траектории t_A предельным переходом $M_1, M_2, \dots \rightarrow N$ вынуждает нас искать другой путь. Определим функцию $m = f_t(n)$ следующим образом: 1. $f_t(0) = 1$. 2. Если (5.3) ложно на уровне n для t_A (произведение (5.5) ложно для всех траекторий t_B на множестве M_n), то $f_t(n) = n + 1$. 3. Если (5.3) истинно на уровне n , то из всех траекторий t_B , для которых произведение (5.5) истинно на M_n , выбираем с наименьшим n_1 и полагаем $f_t(n) = n_1$ ($n_1 \leq n$). Отметим, что функция $f_t(n)$ является неубывающей.

Выделим некоторым образом (например, обведём кружком) те вершины на траектории t_A , для которых $f_t(n) > f_t(n - 1)$ – значение $f_t(n)$ увеличилось по сравнению с предыдущим. Через вершину уровня n может проходить несколько траекторий t_A дерева T_A , однако значения $f_t(n)$, $f_t(n - 1)$ определяются только множествами M_n и меньшими так, что противоречий для

разных траекторий не возникает. Нетрудно видеть, что (5.3) для траектории t_A истинно тогда и только тогда, когда на t_A имеется не более чем конечное число выделенных вершин. Действительно, пусть $f_t(n)$ для всех n , $n > n_0$ остаётся неизменной: $f_t(n_0 + 1) = n_c$, $f_t(n_0 + 2) = n_c, \dots$ Это означает, что на дереве T_B существует траектория, для которой все значения произведения (5.5) истинны, начиная с n_c , т.е. n_2 для этой траектории отсутствует. Наоборот, если число выделенных вершин на t_A бесконечно, то это означает, что для любой траектории t_B на T_B , если (5.5) окажется истинным на некотором уровне, то, спустя некоторое конечное число шагов, неминуемо станет ложным, т.е. существует конечное n_2 для t_B .

Рассматривая всевозможные траектории на T_A , можно выделить указанным способом все вершины на T_A , удовлетворяющие $f_t(n) > f_t(n - 1)$. Формула (5.3) для произвольных переменных предикатов \bar{A} будет истинна тогда и только тогда, когда на любой траектории t_A содержится не более чем конечное число выделенных вершин. При этом для определения, является ли вершина на уровне n дерева T_A выделенной или нет, достаточно рассмотреть всевозможные предикаты \bar{A}, \bar{B} на множествах M_1, M_2, \dots, M_n .

Осуществим некоторую стандартизацию деревьев T_A . Для этого введём понятие 2^n -дерева – бесконечное дерево, у которого каждая вершина на n -м уровне ($n = 0, 1, 2, \dots$) соединена с двумя вершинами на $n + 1$ – м уровне. Таким образом, 2^n -дерево содержит 2^n вершин на n -уровне. Дерево T_A таково, что каждая вершина на n -м уровне соединена с p_n вершинами на $n + 1$ – м уровне, причём p_n является степенью двойки $p_n = 2^{q_n}$ (как было установлено выше) и одинаково для любой вершины на $n + 1$ -м уровне. Введём $q_n - 1$

промежуточных уровней между n -м и $n + 1$ -м уровнями так, чтобы дерево T_A превратилось в 2^n -дерево. Выделенные вершины T_A при этом сохраним и будем считать, что на промежуточных уровнях выделенных вершин нет. Занумеруем последовательно все вершины 2^n -дерева, положив номер корня 0 ($n = 0$), а номера вершины n -го уровня имеют номера от $2^n - 1$ до $2^{n+1} - 2$ слева направо.

Определим характеристическую функцию $y = f_\Phi(x)$ формулы (5.3) равной 0, если x – номер выделенной вершины 2^n -дерева, и равной 1 в противном случае. Функция $f_\Phi(x)$ является ПРФ, поскольку её вычисление алгоритмически детерминировано и число операций для нахождения текущего значения ограничено некоторой ПРФ.

В итоге задача определения истинности произвольной формулы I_N^Z с условием счётности Γ_N , выразимой в ОНФС 1-го порядка (5.3), сводится к установлению существования траектории на 2^n -дереве, содержащей бесконечное число нолей некоторой ПРФ (и тогда (5.3) ложно), либо её отсутствию ((5.3) – истинно).

Отметим, что мы можем произвольным образом изменить любое конечное число значений функции $f_\Phi(x)$, и это не скажется на существовании либо отсутствии указанной траектории. Вопрос истинности (5.3), таким образом, решается предельным поведением $f_\Phi(x)$ в окрестности бесконечности. Следует также иметь в виду, что истинность (5.3) определяется не через классический предел некоторой ОРФ, а через предельное поведение на 2^n -дереве. Если бы задача решалась через классический предел, то теория ОНФС 1-го порядка была бы разрешима в АФ.

§6. Классы эквивалентности

Пусть имеется некоторая неразрешимая в ОРФ и неаксиоматизируемая теория. Всё множество формул такой теории можно разбить на 3 части: доказуемые формулы, доказуемые эквивалентности формулы константе \bar{U} и все остальные. Про первые два подмножества можно сказать, что они содержат определённо истинные и определённо ложные утверждения. В то же время про формулы из третьего подмножества ничего определённого сказать нельзя, располагая только финитными средствами. Поэтому всё внимание математиков сосредоточено именно на первых двух подмножествах. В отношении третьего подмножества обычно ограничиваются лишь констатацией, что оно существует (теория неразрешима).

Мы же сейчас сосредоточим внимание на изучении свойств и структуры именно этого третьего подмножества. Произвольную формулу данной теории формальными средствами можно преобразовать к некоторой эквивалентной. В целом, любая формула порождает некоторый класс эквивалентности – подмножество формул, эквивалентность которых исходной доказуема.

Тогда всё множество формул разбивается на бесконечное множество классов эквивалентности, из которых один содержит константу U и ещё один – константу \bar{U} . Всего классов в неразрешимой теории должно быть бесконечно много, иначе мы просто взяли бы по одной формуле из каждого класса, содержащего истинные формулы, и дополнили бы ими список аксиом теории. Установить же истинность или ложность формул в нужном классе, кроме первых двух, можно только нефинитными средствами.

Построим формулу в I_N^1 , перечисляющую все классы эквивалентности в ОНФС 1-го порядка с условием счётности. Для этого предварительно определим предикат $T(x)$, перечисляющий всевозможные траектории на 2^n -дереве:

$$\chi_T = \forall x, y, z \left(\overline{T(x) \cdot P(666, x, x, y)} + (T(y) = \overline{T(y')}) \cdot \left((z \leq x) + (y \leq z) + \overline{T(z)} \right) \right) \cdot T(0). \quad (6.1)$$

Здесь $P(t, x, y, z)$ – универсальная ПРФ, определяемая условием χ_p (4.8) гл.3, число 666 – номер ПРФ $z = x + y + 1$. Действительно, $\hat{S}f_0f_0 = f_2$, $f_2(x, y) = y$, $c(0, 1) + 1 = 2$, $\hat{R}f_2 = f_6$, $f_6(x, y) = x'$, $c(2, 0) + 1 = 6$, $\hat{S}f_6f_0 = f_{35}$, $f_{35}(x, y) = y'$, $c(6, 1) + 1 = 35$, $\hat{R}f_{35} = f_{666}$, $f_{666}(x, y) = x' + y$, $c(35, 0) + 1 = 666$. Предикат $T(x)$ истинен для всех x , совпадающих с номерами вершин некоторой произвольной траектории, и ложен для всех остальных x . Для этого на произвольный переменный предикат $T(x)$ необходимо наложить следующие условия. Траектория проходит через корневую вершину $T(0) = U$. На каждом уровне дерева есть одна и только одна вершина, через которую проходит траектория. Если $T(x) = U$ на некотором уровне n , то на $n + 1$ -м уровне траектория проходит либо через вершину $2x + 1$, либо $2x + 2$. Равенство $T(y) = \overline{T(y')}$ (6.1) означает, что, если $T(x)$ истинно, то из 2-х значений $T(2x + 1)$ и $T(2x + 2)$ истинно одно и только одно. Сомножитель $(z \leq x) + (y \leq z) + \overline{T(z)}$ означает, что, если $x < z < 2x + 1$, то $T(z)$ – ложно. Таким образом, условию (6.1) удовлетворяют те, и только те предикаты $T(x)$, истинные значения которых образуют некоторую бесконечную траекторию на 2^n -дереве.

Формула

$$\overline{\chi_C \cdot \chi_P \cdot \chi_T} + \exists x \forall y \overline{T(y) \cdot (x \leq y) \cdot P(w, y, y, 0)} \quad (6.2)$$

означает, что для произвольной траектории на 2^n - дереве существует такая вершина x , что для всех последующих вершин траектории значения ПРФ с номером w не равны 0. Здесь χ_C – условие, определяющее функцию Кантора (4.7) гл.3, которая используется в условии, задающем универсальную ПРФ $P(t, x, y, z)$ гл.3.

Пусть Φ – произвольная формула (5.3), и $f_\Phi(x)$ – соответствующая ей ПРФ, определяющая выделенные вершины на 2^n - дереве, а m – номер $f_\Phi(x)$ в универсальной ПРФ. Тогда, подставив вместо свободной переменной w в (6.2) константу $0^{(m)}$, получим формулу, истинную тогда и только тогда, когда истинна Φ . Таким образом, класс эквивалентности, содержащий Φ , имеет своего представителя в (6.2) при некотором значении свободной переменной w . Это означает, что, если мы имеем какой-то способ определения значений истинности формулы (6.2) при различных значениях переменной w , то тем самым мы можем установить истинность любой формулы ОНФС 1-го порядка с условием Γ_N .

Выше было показано, что произвольная формула I_N^1 может быть записана в ОНФС 1-го порядка, причём множество формул I_N^1 образует подмножество формул ОНФС специального вида (5.4). Ситуация выглядит так, что теория I_N^1 является менее общей по сравнению с (5.3). Полученный результат означает равносильность этих двух теорий.

Формула (6.2) после вынесения всех кванторов во внешнюю строку имеет сразу вид нормальной формы Сколема:

$$\exists x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \forall y \Phi_0 \quad (6.3)$$

В предыдущем параграфе было установлено, что множество истинных формул I_N^1 вида (5.1), т.е. содержащих только кванторы существования, рекурсивно перечислимо. Таким образом, минимальное усиление теории (5.1) добавлением всего одной переменной, связанной квантором всеобщности даёт теорию равносильную всей теории I_N^1 , а значит, неразрешимую даже в АФ.

Поскольку условия χ_C, χ_P, χ_T содержат только кванторы всеобщности, то формула (6.2) внешне похожа на формулу 2-го порядка с индивидными рекурсивными предикатами. Однако нужно ясно понимать, что из четырёх предикатов $x \leq y$, $C(x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$, $T(x)$ только первые три являются индивидными. Предикат $T(x)$, хотя и ограничен условием χ_T , является переменным, перечисляя всевозможные траектории.

Выводом формулы (6.2) мы осуществили отображение всего множества формул I_N^1 в себя. В этой связи возникает вопрос, нет ли здесь некоего противоречия. Отметим, прежде всего, что задачи определения истинности формулы (6.2) как общезначимой вообще не ставится: формула (6.2) ложна, поскольку I_N^1 содержит ложные высказывания. Исследуется вопрос истинности (6.2), когда свободная переменная w заменена последовательно константами $0, 0', 0'', \dots$. Но в этом случае номер ПРФ для (6.2) $w_0 \sim \Phi(0)$, $w_1 \sim \Phi(0')$, $w_2 \sim \Phi(0'')$, ... всегда будет много больше величины соответствующей константы, подставленной в (6.2), и противоречия не возникнет.

§7. Общий случай ОНФС

Рассмотрим теперь всё множество формул I_N^Z , содержащих условие счётности Γ_N . Произвольная формула I_N^Z может быть приведена к ОНФС n -го порядка:

$$\begin{aligned} & \exists \bar{A}_1 \forall \bar{A}_2 \dots \forall \bar{A}_{n-1} \exists \bar{A}_n (\exists x \Phi_1(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, x) \cdot \\ & \forall y \Phi_2(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, y)), \end{aligned} \quad (7.1)$$

если n нечётно и

$$\begin{aligned} & \exists \bar{A}_1 \forall \bar{A}_2 \dots \exists \bar{A}_{n-1} \forall \bar{A}_n (\forall x \Phi_1(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, x) + \\ & \exists y \Phi_2(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, y)), \end{aligned} \quad (7.2)$$

если n чётно. Выше мы рассмотрели случай нечётного n , $n = 1$. Рассмотрим произвольную формулу с ОНФС 2-го порядка:

$$\exists \bar{A}_1 \forall \bar{A}_2 (\forall x \Phi_1(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, x) + \exists y \Phi_2(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, y)). \quad (7.3)$$

Построим опять деревья T_{A_0} , T_{A_1} и T_{A_2} наборов предикатов \bar{A}_0 , \bar{A}_1 и \bar{A}_2 на множествах M_1, M_2, M_3, \dots и зафиксируем траектории t_{A_0} , t_{A_1} и t_{A_2} , соответствующие некоторым конкретным набором \bar{A}_0 , \bar{A}_1 и \bar{A}_2 на N .

Если на некотором уровне n_1 ($n = 1, 2, 3, \dots$) формула $\forall x \Phi_1(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, x)$ оказалась ложной, то она будет ложной и для всех последующих n , $n \geq n_1$. Наоборот, если формула $\exists y \Phi_2(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, y)$, будучи ложной для всех n , $n \geq n_2$, на уровне n_2 , оказалась истинной, то она останется истинной и для всех n , $n \geq n_2$.

Для суммы

$$\forall x \Phi_1(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, x) + \exists y \Phi_2(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, y) \quad (7.4)$$

возможны такие варианты. Уровень n_1 не существует – (7.4) истинно на всей траектории. Уровень n_1 существует, n_2 – не существует, тогда (7.4) ложно для всех $n, n \geq n_1$, – единственный вариант, когда (7.4) ложно на \mathbf{N} . Уровни n_1, n_2 существуют, тогда (7.4) ложно для $n, n_1 \leq n < n_2$ при $n_1 < n_2$ и истинно для всех n , если $n_1 \geq n_2$. Таким образом, (7.4) ложно на \mathbf{N} тогда и только тогда, когда n_1 существует, а n_2 – нет (ср. с(5.5) для ОНФС 1-го порядка: (5.5) истинно тогда и только тогда, когда n_1 существует, а n_2 – нет).

Формула

$$\forall \bar{A}_2 (\forall x \Phi_1(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, x) + \exists y \Phi_2(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, y)) \quad (7.5)$$

при фиксированных наборах \bar{A}_0, \bar{A}_1 с соответствующими траекториями t_{P_0}, t_{A_1} , ложна тогда и только тогда, когда существует траектория, для которой n_1 существует, а n_2 – нет.

Определим функцию $f_{t_0 t_1}(n)$, заданную для фиксированных траекторий t_{A_0} и t_{A_1} , аналогичным §5 образом: 1. $f_{t_0 t_1}(0) = 1$. 2. Если сумма (7.4) истинна для всех траекторий t_{A_2} на M_n , то $f_{t_0 t_1}(n) = n + 1$. 3. Если (7.4) ложно на уровне n (множестве M_n), то из всех траекторий t_{A_2} , для которых (7.4) ложно, выбираем с наименьшим n_1 и полагаем $f_{t_0 t_1}(n) = n_1$ ($n_1 \leq n$). Функция $f_{t_0 t_1}(n)$ является неубывающей, и её значение зависит только от ситуации на конечных множествах M_n, M_{n-1}, \dots, M_1 . Формула (7.5) является ложной, если, начиная с некоторого n , $n = n_0$, функция $f_{t_0 t_1}(n)$ является тождественной константой. И наоборот, (7.5) истинно, если $f_{t_0 t_1}(n)$ неограниченно растёт.

Дополним деревья T_{A_0} и T_{A_1} промежуточными уровнями до 2^n – дерева, учитывая, что число вершин на n –м уровне является

степенью двойки: 2^{p_n} и 2^{q_n} соответственно для T_{A_0} и T_{A_1} , причём, в общем случае, $p_n \neq q_n$. Уровни p_n и q_n на 2^n -деревьях будем по-прежнему называть n -ми уровнями, хотя фактически $p_n \gg n$, $q_n \gg n$.

Определим характеристическую функцию $y = f_\Phi(x_0, x_1)$ формулы (7.3), где x_0 нумерует вершины 2^n -дерева, соответствующего T_{A_0} , x_1 нумерует вершины 2^n -дерева, соответствующего T_{A_1} следующим образом. Если x_0 и x_1 не принадлежат одному и тому же n -му уровню (x_0 и x_1 принадлежат разным уровням, либо x_0 или x_1 принадлежат какому-то промежуточному уровню на 2^n -дерева), то $f_\Phi(x_0, x_1) = 1$. Пусть x_0 и x_1 принадлежат произвольному n -му уровню. Проведём произвольную траекторию t_{A_0} через вершину x_0 и траекторию t_{A_1} через x_1 . Если $f_{t_0 t_1}(n) > f_{t_0 t_1}(n-1)$, то $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$, а если $f_{t_0 t_1}(n) = f_{t_0 t_1}(n-1)$, то $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$. Поскольку вычисление $f_\Phi(x_0, x_1)$ не выходит за рамки M_n , эта функция является ПРФ.

Зафиксируем 2 произвольные траектории t_{A_0} и t_{A_1} на 2^n -дерева и пусть x_0 – номер произвольной вершины на 1-й траектории. Тогда существует не более одного значения x_1 – номера произвольной вершины на 2-й траектории, при котором $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$, причём есть простая примитивно рекурсивная оценка на величину x_1 , $x_1 = x_{1m}$, такая, что при $x_1 > x_{1m}$ функция $f_\Phi(x_0, x_1)$ заведомо не может быть равной 0. Аналогично для произвольного значения x_1 существует не более одного значения x_0 на 1-й траектории, при котором $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$. Это следует из определения $f_\Phi(x_0, x_1)$.

Формула (7.5) при фиксированных наборах предикатов $\overline{A_0}, \overline{A_1}$, соответствующим траекториям t_{A_0}, t_{A_1} , истинна тогда и только

тогда, когда существует бесконечное множество пар x_0, x_1 , при которых $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$.

Формула (7.3) истинна тогда и только тогда, когда для произвольной траектории t_{A_0} на 2^n -дереве существует траектория t_{A_1} такая, что на данной паре траекторий имеется бесконечное множество пар x_0, x_1 ($x_0 \in T_{A_0}, x_1 \in T_{A_1}$), удовлетворяющих $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$. Предельная разрешающая процедура для определения истинности (7.3) сводится, таким образом, к последовательному вычислению значений ПРФ $f_\Phi(x_0, x_1)$ и определению поведения полей $f_\Phi(x_0, x_1)$ при $x_0, x_1 \rightarrow \infty$.

Полученный результат легко обобщается на случай произвольного порядка ОНФС (7.1) и (7.2). Характеристическая функция $f_\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ вычисляется по описанным выше схемам для n -чётного, как для $n = 2$, и для n – нечётного, как для $n = 1$ в §5. При чётном n формула (7.2) истинна тогда и только тогда, когда для произвольной траектории t_{A_0} на 2^n -дереве существует траектория t_{A_1} такая, что для произвольной t_{A_2} траектории существует t_{A_3} и т.д... так, что имеется бесконечное множество наборов x_0, x_1, \dots, x_{n-1} ($x_0 \in t_{A_0}, \dots, x_{n-1} \in t_{A_{n-1}}$), удовлетворяющих $f_\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$. При n нечётном формула (7.1) истинна тогда и только тогда, когда для произвольной траектории t_{A_0} на 2^n -дереве существует траектория t_{A_1} такая, что для произвольной траектории $t_{A_2} \dots$ для произвольной траектории $t_{A_{n-1}}$ существует x_c такое, что ни один набор x_0, x_1, \dots, x_{n-1} не удовлетворяет $f_\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$, если $x_0 > x_c$.

Формула, перечисляющая классы эквивалентности для ОФНС 2-го порядка, имеет вид:

$$\overline{\Gamma_n \cdot \chi_C \cdot \chi_P} + \exists T_1 \left(\overline{\chi_T(T_0)} + \chi_T(T_1) \cdot \Phi_w(T_0, T_1) \right), \quad (7.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_w(T_0, T_1) = & \forall x \exists x_0, x_1 (T_0(x_0) \cdot T_1(x_1) \cdot (x \leq x_0) \cdot \\ & P(w, x_0, x_1, 0)). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь на переменные предикаты $T_0(x)$, $T_1(x)$ наложено условие χ_T так, что $T_0(x)$, $T_1(x)$ описывают произвольные траектории на 2^n -дереве. Параметр w в $P(w, x_0, x_1, 0)$ является номером ПРФ – характеристической функции $f_\Phi(x_0, x_1)$ формулы (7.3). Формула (7.7) означает, что для произвольно высокого уровня x на 2^n -дереве на траекториях $T_0(x)$, $T_1(x)$ найдутся вершины, удовлетворяющие $f_\Phi(x_0, x_1) = 0$.

Нормальная форма для (7.6) имеет вид:

$$\exists T_1, t_1, t_2 \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \exists y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \Phi_0^1, \quad (7.8)$$

где Φ_0^1 – бескванторная формула I^1 . Здесь учтено, что квантор $\exists A$, возникающий в слагаемом $\overline{\Gamma_N}$, может быть объединен в один общий квантор существования с квантором $\exists T_1$. Таким образом, произвольная формула, приводимая к ОНФС 2-го порядка, может быть преобразована в формулу вида $\exists A^1 \Phi^1$, минимальным образом отличающаяся от формулы I^1 наличием одноместного предиката, связанного квантором существования. Тем не менее, приведение формулы $\exists A^1 \Phi^1$ к ОНФС даёт снова ОНФС 2-го порядка.

Для сравнения отметим, что перечисляющая формула (6.2) для ОНФС 1-го порядка, записанная в I^Z , также имеет вид $\exists A^1 \Phi^1$. Однако в этом случае кванторная строка Φ^1 такова: $\exists x \forall y$, а формулы вида $\exists A \exists x \forall y \Phi_0^1$ приводимы к ОНФС 1-го порядка.

Формулы, перечисляющие классы эквивалентности для ОНФС 3-го, 4-го и последующих порядков имеет вид:

$$\overline{\Gamma_n \cdot \chi_C \cdot \chi_P} + \exists T_1 \forall T_2 \left(\overline{\chi_T(T_0)} + \chi_T(T_1) \cdot \left(\overline{\chi_T(T_2)} + \Phi_w(T_0, T_1, T_2) \right) \right), \quad (7.9)$$

$$\overline{\Gamma_n \cdot \chi_C \cdot \chi_P} + \exists T_1 \forall T_2 \exists T_3 \left(\overline{\chi_T(T_0)} + \chi_T(T_1) \cdot \left(\overline{\chi_T(T_2)} + \chi_T(T_3) \cdot \Phi_w(T_0, T_1, T_2, T_3) \right) \right), \quad (7.10)$$

... ,

где

$$\Phi_w(T_0, T_1, T_2) = \forall x \exists x_0, x_1, x_2 (T_0(x_0) \cdot T_1(x_1) \cdot T_2(x_2) \cdot (x \leq x_0) \cdot \Psi_w^3), \quad (7.11)$$

$$\Phi_w(T_0, T_1, T_2, T_3) = \forall x \exists x_0, x_1, x_2, x_3 (T_0(x_0) \cdot T_1(x_1) \cdot T_2(x_2) \cdot T_3(x_3) \cdot (x \leq x_0) \cdot \Psi_w^4), \quad (7.12)$$

... ,

$$\Psi_w^3 = \exists y_1 \left(P(w, x_0, y_1, 0) \cdot C(x_1, x_2, y_1) \right), \quad (7.13)$$

$$\Psi_w^4 = \exists y_1 y_2 \left(P(w, x_0, y_1, 0) \cdot C(x_1, y_2, y_1) \cdot C(x_2, x_3, y_2) \right), \quad (7.14)$$

... .

Здесь параметр w в Ψ_w^3 является номером ПРФ – характеристической функции $f_\Phi(x_0, x_1, x_2)$ формулы (7.1) 3-го порядка, w в Ψ_w^4 – номер ПРФ функции $f_\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ формулы (7.2) 4-го порядка и т.д.

Нормальная форма (7.9) имеет вид:

$$\exists T_1 \forall T_2 t \exists x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \forall y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \Phi_0^1,$$

где Φ_0^1 – бескванторная формула I^1 .

Нормальная форма (7.10) имеет вид:

$$\exists T_1 \forall T_2 \exists T_3, t_1, t_1 \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \exists y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \Phi_0^1$$

и т.д.

Формулы (7.9), (7.10) могут быть приведены к ОНФС 3-го и 4-го порядка соответственно. Таким образом, все формулы n -го порядка ($n = 1, 2, 3, \dots$) могут быть отображены «в себя» - в некоторую универсальную формулу того же порядка. Здесь имеется прямая аналогия с универсальной ЧРФ, перечисляющей все ЧРФ и самой являющейся ЧРФ.

Глава 5

Множества высших мощностей

§1. Отображение предикатов в множество элементов

В предыдущих главах были рассмотрены частичные теории I^Z для конечных множеств M_n и счётного множества N . Это достигалось введением условия конечности Γ_n и счётности Γ_N . Если теории конечных множеств не представляют большего интереса ввиду их разрешимости, то теория I_N^Z с условием счётности Γ_N охватывает практически всю совокупность задач математики, имеющих прикладное значение. Это является следствием неожиданной на первый взгляд возможности выразить все задачи математики континуума в рамках исчисления I_N^Z .

Тем не менее, общепринятой методикой изложения задач анализа является отождествление вещественных чисел с некоторым исходным множеством C , имеющим мощность континуума, а не с множеством одноместных предикатов на N , как это сделано выше. Поэтому для полноты картины естественно рассмотреть частичные теории I^Z с условиями Γ_M , определяющими множества более высоких мощностей. Разумеется, наибольший интерес представляет условие Γ_C , определяющее множество C мощности континуум, однако предварительно сделаем ряд замечаний общего характера.

Целью настоящего изложения вовсе не является построение наиболее удобных формализмов для неких конкретных практических приложений, а поиск разрешающих процедур. Поэтому для нас важна сама возможность представления определённого круга задач в рамках максимально простой теории и в максимально простой форме. При этом не имеет значения

сложность реализации такого представления с чисто технической стороны дела. Построение условий Γ_M множеств высших мощностей будем рассматривать именно под этим углом зрения.

Пусть имеется некоторая замкнутая по всем предикатам и предметным переменным формула Φ^Z , при этом наличие условия Γ_M для какого-либо множества M не обязательно. Это означает, что на каждом конкретном множестве M формула Φ^Z имеет определённую истинность. Построим условие Γ_W , которое превращает текущее множество M в множество всех подмножеств M , и выделим в этом множестве M^+ подмножество M условием Ψ_M .

Тогда произвольный одноместный предикат $A(x)$ на M может быть отождествлён с элементом множества M^+ , а его аргумент x — с элементом множества M , $M \subset M^+$. Пусть также в нашем распоряжении имеется функция, осуществляющая взаимно однозначное отображение M в $M \times M$, т.е. отображающая элементы M в упорядоченные пары на M , как это делает функция Кантора на N .

Тогда с помощью этой функции мы сможем превратить все многоместные предикаты в Φ^Z в одноместные, правда при этом появится свободный предикат, выражающий обобщённую функцию Кантора. После этого формула Φ^Z может быть переписана как формула I^1 , поскольку кванторы, связывающие предикаты в Φ^Z , превратятся в кванторы, связывающие предметные переменные. Разумеется, формула Φ^Z не превратится вся целиком в формулу I^1 , поскольку будет присутствовать слагаемое $\overline{\Gamma_W}$, которое не может быть формулой I^1 . Тем не менее, вместо формулы Φ^Z , имеющей произвольно высокий порядок ОНФС, получаем формулу, у которой порядок ОНФС определяется слагаемым $\overline{\Gamma_W}$.

В общем случае для произвольного M мы не можем рассчитывать, что нам будет известно отображение $M \rightarrow M \times M$, как в случае со счётным множеством. Поэтому видоизменим конструкцию отображения M в M^+ , а именно, располагая M , построим сначала множество M_x , являющееся прямым произведением $M \times M$, а затем построим множество M_x^+ , состоящее из всех подмножеств M_x .

Дадим определение предиката $W(x, y)$. Начнём с описания множества, на котором он задан. Пусть M – произвольное множество, содержащее более одного элемента. Зададимся дополнительным множеством M_1 , $M \cap M_1 = \emptyset$ и пусть между ними существует взаимно однозначное соответствие.

Построим множество $M_x = M \times M_1$ упорядоченных пар, причём $M \cap M_x = \emptyset$, $M_1 \subset M_x$. При этом диагональные элементы M_x являются элементами множества M_1 . Множество M_x^+ , на котором задан $W(x, y)$, является множеством всех подмножеств M_x , причём $M \subset M_x^+$, $M_x \subset M_x^+$. Какими элементами являются элементы M и M_x в множестве M_x^+ , уточним ниже.

Будем по-прежнему называть элемент x в $W(x, y)$ предшествующим, а y – последующим. Пусть $W(x, x)$, истинно тогда и только тогда, когда $x \in M_x^+ - M$. Соответственно условие принадлежности $x \in M$ имеет вид $\overline{W(x, x)}$. Произвольный элемент x из M имеет единственный последующий элемент, и эти элементы образуют множество M_1 , не пересекающееся с M . Элементы множества M_1 также имеют единственный предшествующий элемент в M , но кроме того могут иметь и другие предшествующие элементы вне M . Таким образом, условие $x \in M_1$ запишется так:

$$\exists y(W(y, x) \cdot \overline{W(y, y)}) \quad (1.1)$$

Произвольной паре элементов из M и M_1 соответствует единственный элемент z , являющийся предшествующим для

каждого элемента пары: $W(z, x)$, $W(z, y)$ - истинны, $x \in M$, $y \in M_1$. В совокупности элементы z образуют множество $M_x = M \times M_1$. При этом, если y находится в соответствии с x , т.е. $W(x, y)$ истинно, то $z = y$, и диагональные элементы M_x образуют множество M_1 . Таким образом, у каждого элемента $x \in M$ есть $|M|$ предшествующих элементов, и все они принадлежат M_x , в том числе один принадлежит M_1 . У каждого элемента $y \in M_1$ есть также $|M|$ предшествующих элементов, все они принадлежат M_x , в том числе один из них – сам элемент y , т.е. $W(y, y) = U$. У каждого элемента $y \in M_1$, есть ровно 2 последующих: сам элемент y и элемент x , $x \in M$, соответствующий элементу y : $W(x, y) = U \Rightarrow W(y, x) = U$. У каждого элемента y , $y \in M_x - M_1$, есть только один предшествующий – сам элемент y , $W(y, y) = U$, и есть ровно 3 последующих: сам элемент y и пара элементов из M и M_1 , порождающая элемент y .

Определяющее условие для $x \in M_x$ имеет вид:

$$\exists y(W(x, y) \cdot \overline{W(y, y)}). \quad (1.2)$$

Всё множество M_x^+ , на котором задан предикат $W(x, y)$, таково. Произвольному предикату $A(x)$ на множестве $x \in M_x$ поставлен в соответствие единственный элемент p , для которого $W(x, p)$, истинно тогда и только тогда, когда $A(x) = U$, т.е. $W(x, p) = A(x)$, $x \in M_x$. Всё множество элементов p в совокупности образует M_x^+ .

Поскольку элементы множеств M , M_1 , M_x также являются элементами M_x^+ , необходимо проверить, что каждому из этих элементов соответствуют разные предикаты на M_x . Произвольному элементу x , $x \in M$ соответствует предикат, истинный для всех пар $\langle x, y \rangle$ и ложный для остальных пар, образующих M_x . Произвольному элементу y , $y \in M_1$ соответствует предикат истинный для всех пар $\langle x, y \rangle$ и ложный для остальных пар. Поскольку в M более одного элемента, все эти

предикаты различны. Произвольному элементу z , $z \in \mathbf{M}_x - \mathbf{M}_1$, соответствует предикат $A(x)$, истинный только для $x = z$ и ложный для остальных x , $x \in \mathbf{M}_x$. Таким образом, определение \mathbf{M}_x^+ не является противоречивым.

Нам осталось определить последующие элементы для $x \in \mathbf{M}_x^+ - \mathbf{M}_x - \mathbf{M}$, при которых $W(x, y) = U$. По определению множества $\mathbf{M}_x^+ - \mathbf{M}$ имеем $W(x, x) = U$. Положим $W(x, y) = \bar{U}$ для всех остальных y , если $x \in \mathbf{M}_x^+ - \mathbf{M}_x - \mathbf{M}$. Это завершает определение предиката $W(x, y)$.

Выпишем формальные условия, определяющие $W(x, y)$.
Формула

$$\Psi_1(x) = W(x, x) + \exists y(W(x, y) \cdot W(y, y)) \quad (1.3)$$

означает существование элемента $y \in \mathbf{M}_1$, соответствующего элементу $x \in \mathbf{M}$. Элемент из \mathbf{M} , предшествующий элементу из \mathbf{M}_1 , является единственным:

$$\Psi_2(A, x, y, z) = W(y, y) + W(z, z) + \overline{W(y, x) \cdot W(z, x) \cdot A(y)} + A(z). \quad (1.4)$$

Единственность элемента $y \in \mathbf{M}_1$, соответствующего x , $x \in \mathbf{M}$, сформулируем ниже. Сомножитель $W(y, y)$ в (1.3) означает, что множества \mathbf{M} и \mathbf{M}_1 не пересекаются. Условие

$$\Psi_3(A, x, y, z, r) = W(x, x) + W(z, z) + \overline{W(z, y)} + \exists t(W(t, x) \cdot W(t, y) \cdot W(t, t) \cdot (\overline{W(r, x) \cdot W(r, y) \cdot A(r)} + A(t))) \quad (1.5)$$

выражает факт существования и единственности элемента t , предшествующего произвольной паре x, y , $x \in \mathbf{M}, y \in \mathbf{M}_1$. Кроме того $W(t, t) = U$, если $t \in \mathbf{M}_x$.

Формула

$$\Psi_4(x, y) = W(x, x) + \overline{W(y, x)} + \exists z, t(W(y, z) \cdot W(t, z) \cdot \overline{W(t, t)}) \quad (1.6)$$

означает, что у произвольного элемента x множества \mathbf{M} нет других предшествующих элементов, кроме элементов из \mathbf{M}_x ,

образованных в паре с элементом z из \mathbf{M}_1 согласно условию (1.5).
Формула

$$\Psi_5(x, y, z) = W(x, x) + \overline{W(x, y) \cdot W(z, y)} + \exists t(W(z, t) \cdot \overline{W(t, t)}) \quad (1.7)$$

означает то же самое, что и (1.6), относительно произвольного элемента $y \in \mathbf{M}_1$: у него нет других предшествующих элементов z , кроме $z \in \mathbf{M}_x$, образованных в паре с элементом t из \mathbf{M} .

У произвольного элемента $x, x \in \mathbf{M}_x - \mathbf{M}_1$ есть единственный предшествующий – он сам:

$$\Psi_6(A, x, y, z) = W(y, y) + \overline{W(x, y)} + \exists t(W(t, x) \cdot \overline{W(t, t)}) + \overline{W(z, x) \cdot A(z)} + A(x). \quad (1.8)$$

Если элемент r принадлежит \mathbf{M}_x , то у него не может быть двух других последующих элементов y и z , кроме двух элементов – самого элемента r и элемента из \mathbf{M} , $x \in \mathbf{M}$, порождающего элемент $r \in \mathbf{M}_x$:

$$\Psi_7(A, x, y, z, r) = W(x, x) + \overline{W(r, x) \cdot W(r, y) \cdot W(r, z) \cdot A(y)} + A(r) + A(x) + A(z). \quad (1.9)$$

В частности, если $y \in \mathbf{M}_1$ и x – порождающий его элемент: $x \in \mathbf{M}$, то у элемента y есть только два последующих элемента x и y :

$$\Psi_8(A, x, y, z) = W(x, x) + \overline{W(x, y) \cdot W(y, z) \cdot A(z)} + A(x) + A(y). \quad (1.10)$$

Наконец, если $x \in \mathbf{M}_x^+ - \mathbf{M}_x$, то у него существует единственный последующий:

$$\Psi_9(A, x, y, z) = \exists t(W(x, t) \cdot \overline{W(t, t)}) + \overline{W(x, y) \cdot W(x, z) \cdot A(y)} + A(z), \quad (1.11)$$

в том числе, если $x \in \mathbf{M}$, то этот последующий – элемент \mathbf{M}_1 , а если $x \in \mathbf{M}_x^+ - \mathbf{M}_x - \mathbf{M}$, то последующим является сам элемент x .

Теперь можно сформулировать условие отображения предиката $A(x)$, $x \in \mathbf{M}_x$, множество \mathbf{M}_x^+ . Формула

$$\Psi_{10}(A) = \exists p \forall x, y (W(y, y) + \overline{W(x, y)} + (A(x) = W(x, p))) \quad (1.12)$$

означает существование элемента $p \in \mathbf{M}_x^+$, для которого предикат $W(x, p)$ совпадает с $A(x)$ на множестве \mathbf{M}_x , а формула

$$\Psi_{11}(A, x, y) = \exists z, t \left(W(z, t) \cdot \overline{W(t, t)} \cdot (W(z, x) = \overline{W(z, y)}) \right) + \overline{A(x)} + A(y) \quad (1.13)$$

устанавливает единственность такого элемента.

Условия Ψ_1, \dots, Ψ_{11} в совокупности определяют предикат $W(x, y)$ как условно индивидный и дифференцирующий: $\Gamma_w = \forall A, x, y, z, r (\Psi_1 \cdot \Psi_2 \cdot \Psi_3 \cdot \Psi_4 \cdot \Psi_5 \cdot \Psi_6 \cdot \Psi_7 \cdot \Psi_8 \cdot \Psi_9 \cdot \Psi_{10} \cdot \Psi_{11})$.
(1.14)

Термин «условно индивидный» использован в том смысле, что, если определить множество \mathbf{M} некоторым условием $\Gamma_M(D)$ с дифференцирующим предикатом D , то предикат $W(x, y)$ становится индивидным и, в совокупности с D , дифференцирующим на \mathbf{M}_x^+ .

Пусть Φ – произвольная полностью замкнутая формула I^2 , содержащая только одноместные и двухместные предикаты, при этом Φ может содержать слагаемое Γ_M , определяющее некоторое произвольное множество \mathbf{M} . Тогда Φ может быть преобразовано в формулу Φ^1 исчисления I^1 , содержащую только один двухместный предикат $W(x, y)$ и замкнутую по всем предметным переменным, такую, что истинность Φ на \mathbf{M} совпадает с истинностью $\overline{\Gamma_w} + \Phi^1$ на \mathbf{M}_x^+ . При этом формула Φ^1 остаётся неизменной для любого множества \mathbf{M} , $|\mathbf{M}| > 1$.

Преобразование $\Phi \rightarrow \Phi^1$ выглядит так. Каждому предикату $R(x), P(x, y), Q(x, y), \dots$ в Φ сопоставляем предметную переменную r, p, q, \dots . Пусть Ψ – некоторая частичная формула внутри Φ имеет вид $\exists x \Psi(x)$. Тогда, если x не встречается на второй позиции ни в одном двухместном предикате в $\Psi(x)$, то осуществляем преобразование $\exists x \Psi(x) \rightarrow \exists x (\overline{W(x, x)} \cdot \Psi(x))$.

В противном случае вводим дополнительную переменную x_1 для второй позиции в двухместных предикатах:

$\exists x \Psi(x) \rightarrow \exists x, x_1 \left(\overline{W(x, x)} \cdot W(x, x_1) \cdot \Psi(x, x_1) \right)$. Аналогичные преобразования выполняются для квантора всеобщности: $\forall x \Psi(x) \rightarrow \forall x \left(W(x, x) + \Psi(x) \right)$,

$\forall x \Psi(x) \rightarrow \forall x, x_1 \left(W(x, x) + \overline{W(x, x_1)} + \Psi(x, x_1) \right)$. Кванторы, связывающие предикаты: $\forall R, \exists P, \forall Q, \dots$ заменяем кванторами с предметными переменными: $\forall r, \exists p, \forall q, \dots$. Описанная процедура выполняется для всех кванторов в Φ .

Произвольный предикат $P(x, y)$ внутри Φ заменяется формулой $\exists u (W(u, x) \cdot W(u, y_1) \cdot W(u, p))$ или формулой $\forall u (\overline{W(u, x)} \cdot W(u, y_1) + W(u, p))$ на выбор, исходя из соображений удобства. Если же переменные в предикате совпадают, то замена такова: $P(x, x) \rightarrow W(x_1, p)$. Одноместный предикат трактуется как двухместный с совпадающими переменными: $R(x) \rightarrow W(x_1, r)$.

Смысл данного преобразования состоит в следующем. Переменная x , стоящая на первом месте предиката $P(x, y)$, отображается в множество \mathbf{M} , $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}_x^+$. Переменная y , стоящая на втором месте – в множество \mathbf{M}_1 . Паре x, y , $x \in \mathbf{M}, y \in \mathbf{M}_1$ соответствует единственный элемент u , $u \in \mathbf{M}_x$. Если элементы x и y совпадают, то из определения предиката W следует $u = y$.

Таким образом, формула Φ преобразуется в формулу Φ^1 исчисления \mathbf{I}^1 , однако вместе со слагаемым $\overline{\Gamma_w}$ она, разумеется, не приводится к формуле \mathbf{I}^1 .

Анализируя (1.3) – (1.14), получаем кванторную строку для $\overline{\Gamma_w}$:

$$\exists A^1 \forall p \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \forall y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8. \quad (1.15)$$

Здесь учтено, что (1.7) и (1.11) могут быть объединены в одну формулу (с помощью тождества $(A + B) \cdot (A + C) = A + BC$) и

потому переменных $y - 8$, а не 9. Суммарно формула Φ преобразуется к виду:

$$\exists A^1 \Phi^1(A^1, W^2), \quad (1.16)$$

где $\Phi^1(A^1, \exists W^2)$ – формула I^1 .

Отметим ещё принципиальное отличие слагаемого $\overline{\Gamma}_w$ от слагаемого $\overline{\Gamma}_N$. Последнее позволяет привести формулу $\overline{\Gamma}_N + \Phi^1$ к ОНФС 1-го порядка, а формула $\overline{\Gamma}_w + \Phi^1$ может быть приведена лишь к ОНФС 2-го порядка. Дело в том, что для приведения формулы к ОНФС 1-го порядка кванторная строка должна иметь вид $\exists \bar{A} \exists x \forall y$, а строка слагаемого $\overline{\Gamma}_w$ содержит единственный квантор $\forall p$, препятствующий этому. Таким образом, формула $\overline{\Gamma}_w + \Phi^1$ минимальным образом отличается от формулы исчисления I^1 наличием квантора $\exists A^1$ и минимальным образом отличается от ОНФС 1-го порядка наличием квантора $\forall p$.

Обобщение формулы Φ на случай многоместных предикатов будет рассмотрено ниже.

§2. Условие континуума

Располагая предикатом $W(x, y)$, мы можем записать определяющее условие для множеств более высоких мощностей, чем счётное N . В том числе определяющее условие для множества мощности континуум имеет вид $\Gamma_w \cdot \Gamma_N^+$, где Γ_N^+ – условие счётности Γ_N , модифицированное по описанной выше схеме.

Произвольную формулу исчисления I_N^Z любого порядка, содержащую предикаты одной и двух переменных, можно привести к виду (1.16), поскольку Γ_N также содержит только одноместные и двухместные предикаты. Однако, если Φ^Z (в

формуле $\overline{\Gamma_N} + \Phi^Z$) включает в себя предикаты трёх и более переменных, то необходимы предварительные преобразования. Количество переменных в предикате можно сократить с помощью функции Кантора $c(x, y) = z$, однако сам предикат $C(x, y, z)$ содержит 3 переменные, поэтому требуемое преобразование будем осуществлять с помощью обратных функций Кантора $\mathcal{L}(z, x)$, $R(z, x)$ (2.5), (2.6) гл. 3.

В том числе, произвольный переменный предикат трёх переменных может быть представлен в виде:

$$\exists u (B(z, u) \cdot \mathcal{L}(u, x) \cdot R(u, y)), \quad (2.1)$$

четырёх переменных:

$$\exists u, v (B(z, u) \cdot \mathcal{L}(u, x) \cdot R(u, v) \cdot \mathcal{L}(v, y) \cdot R(v, t)) \quad (2.2)$$

и т.д.

Поскольку определение обратных функций Кантора (2.5), (2.6) содержит ряд дополнительных промежуточных функций, оно также должно быть видоизменено. Прямое определение предикатов $\mathcal{L}(z, x)$, $R(z, y)$ таково:

$$\chi_0^c = R(0, 0) \cdot \overline{R(0, x')} \quad (2.3)$$

$$\chi_1^c = \overline{R(z, 0)} + \mathcal{L}(z', 0) \cdot \overline{\mathcal{L}(z', x')} \cdot (R(z', x') = \mathcal{L}(z, x)), \quad (2.4)$$

$$\chi_2^c = R(z, 0) + (\mathcal{L}(z', x') = \mathcal{L}(z, x)) \cdot (R(z', y) = R(z, y')), \quad (2.5)$$

$$\chi^c = \forall x, y, z (\chi_0^c \cdot \chi_1^c \cdot \chi_2^c) \quad (2.6)$$

Условие (2.6) задаёт оба предиката $\mathcal{L}(z, x)$, $R(z, y)$ как индивидные функции. Здесь формула (2.3) играет роль начального условия для $R(z, y)$ при $z = 0$. Формула (2.4)

определяет последующие значения предикатов при $y = 0$, а формула (2.5) – значения $R(z, y)$, $\mathcal{L}(z, x)$ для z' при $y > 0$.

Таким образом, формула $\overline{\Gamma_N} + \Phi^Z$ может быть преобразована к виду:

$$\overline{\Gamma_N} + \overline{\chi^c} + \Phi_2^Z, \quad (2.7)$$

где Φ_2^Z – произвольная формула I^Z , содержащая только одноместные и двухместные предикаты.

Наконец, то описанной выше процедуре (2.7) приводится к виду (1.16). Это означает, что любая формула I_N^Z с условием счётности, имеющая произвольно высокий порядок ОНФС, может быть записана с помощью только одного двухместного предиката $W(x, y)$ и одного одноместного связанного предиката $A(x)$.

Условие Γ_W (1.3) – (1.14) имеет довольно сложную конструкцию, поскольку предполагается, что на произвольном множестве M у нас нет функции, отображающей прямое произведение $M \times M$ в M , точнее нет формальных средств для построения такой функции. Однако на счётном множестве эту роль выполняет функция Кантора. Поэтому мы можем упростить условие Γ_W , построив непосредственно множество всех подмножеств для M без промежуточного множества $M_x = M \times M_1$.

Пусть M – произвольное множество (конечное или бесконечное), и M^+ – множество всех подмножеств M . Определим предикат $V(x, y)$ на M^+ соотношениями:

$$\Psi_0 = \overline{V(x, y)} + V(x, x), \quad (2.8)$$

$$\Psi_a = \overline{V(x, x) \cdot V(y, x) \cdot A(x)} + A(y), \quad (2.9)$$

$$\Psi_e = \exists p \forall x \left(\overline{V(x, x)} + (A(x) = V(x, p)) \right), \quad (2.10)$$

$$\Psi_d = \exists t \left(V(t, t) \cdot (V(t, x) = \overline{V(t, y)}) + \overline{A(x)} + A(y) \right), \quad (2.11)$$

$$\Gamma_V = \forall A, x, y (\Psi_0 \cdot \Psi_a \cdot \Psi_e \cdot \Psi_d), \quad (2.12)$$

смысл которых состоит в следующем. Произвольному одноместному предикату $A(x)$, $x \in \mathbf{M}$ поставлен в соответствие единственный элемент p , $p \in \mathbf{M}^+$. Существование и единственность p устанавливают формулы (2.10) и (2.11). При этом множество \mathbf{M} является подмножеством \mathbf{M}^+ , а элементам из \mathbf{M}^+ , принадлежащим одновременно и к \mathbf{M} , поставлен в соответствие предикат, истинный для самого элемента и ложный для остальных элементов из \mathbf{M} . Кроме того у элементов из $\mathbf{M}^+ - \mathbf{M}$ нет последующих. Иначе: $V(x, x)$ истинно тогда и только тогда, когда $x \in \mathbf{M}$. В этом случае у x есть единственный предшествующий – сам элемент x . Если же элемент не принадлежит \mathbf{M} , то у него вообще нет последующих. Эти утверждения выражают формулы (2.8), (2.9).

Пусть Φ^Z – произвольная формула исчисления I_N^Z . Тогда формула $\overline{\Gamma_N} + \Phi^Z$ может быть преобразована к виду $\overline{\Gamma_N} + \overline{\chi^c} + \Phi_1^Z$, где формула Φ_1^Z содержит только одноместные предикаты (связанные и свободные) после свёртки с обратными функциями Кантора, кроме предикатов $D(x, y)$, $x \leq y$, $\mathcal{L}(x, y)$, $R(x, y)$. После этого можно перейти с множества \mathbf{N} на множество \mathbf{C} , введя условие Γ_V с соответствующим преобразованием формулы $\overline{\Gamma_N} + \overline{\chi^c} + \Phi_1^Z$, а именно: всем одноместным предикатам сопоставляется предметная переменная, а на предметные переменные из \mathbf{N} накладывается условие принадлежности к \mathbf{N} . Это реализуется так: одноместные

предикаты $P(x), R(x), Q(x), \dots$ заменяются на $V(x, p), V(x, r), V(x, q) \dots$ во всех вхождениях в Φ_1^Z , каждый с соответствующей переменной. Предикатные кванторы $\forall P, \exists R, \dots$ заменяются на $\forall p, \exists r, \dots$ кванторы предметных переменных $\forall x \Psi(x), \exists y \Psi(y)$ дополняются условиями принадлежности к N : $\forall x (\overline{V(x, x)} + \Psi(x)), \exists y (V(y, y) \cdot \Psi(y))$. В результате получаем формулу, не содержащую связанных предикатов, записанную с помощью пяти двухместных предикатов: $V(x, y), D(x, y), x \leq y, \mathcal{L}(x, y), R(x, y)$. С учётом условия Γ_V формула $\overline{\Gamma_N} + \Phi^Z$ преобразуется к виду:

$$\exists A^1 \Phi^1(A^1, V, D, \leq, \mathcal{L}, R) \quad (2.13)$$

Формула (2.13) строится проще, чем (1.16), однако содержит 5 двухместных свободных предикатов вместо одного $W(x, y)$.

Кванторная строка слагаемого $\overline{\Gamma_V}$ с учётом кванторов в (2.8) – (2.11) имеет вид:

$$\exists A^1 \forall p \exists x, y \forall t. \quad (2.14)$$

Наличие единственной переменной p препятствует преобразованию (2.13) в ОНФС 1-го порядка, т.е. по-прежнему имеем ОНФС 2-го порядка для (2.13).

Разумеется, можно рассматривать на континууме с условием $\Gamma_V \cdot \Gamma_N$ более сложные задачи типа

$$\overline{\Gamma_V} + \overline{\Gamma_N} + \Phi^Z, \quad (2.15)$$

где Φ^Z содержит связанные предикаты, заданные на \mathcal{C} . Однако в таких задачах используются элементы множества более высокой мощности, чем континуум, а именно \mathcal{C}^+ . Такие задачи

не характерны для конкретных приложений, и мы не будем останавливаться на их анализе.

§3. Условия для высших мощностей

Условия Γ_W (1.14) и Γ_V (2.12) позволяют перейти от множества \mathbf{M} к множеству \mathbf{M}^+ всех подмножеств \mathbf{M} , если известно определяющее условие Γ_M для \mathbf{M} . При этом произвольная формула Φ^Z с условием Γ_M может быть приведена к каноническому виду (1.16) на \mathbf{M}^+ , если Φ^Z содержит только одноместные и двухместные предикаты. Рассмотрим более общий случай многоместных предикатов в Φ^Z . Возможны два пути решения поставленной задачи.

Первый вариант состоит в том, чтобы определить модифицированный предикат $W^n(x, y)$ условием Γ_W^n , в котором множество $\mathbf{M}_x = \mathbf{M} \times \mathbf{M}_1$ заменено прямым произведением $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \times \dots \times \mathbf{M}_n$. Соответственно \mathbf{M}_x^+ является множеством всех подмножеств множества $\mathbf{M}_1 \times \dots \times \mathbf{M}_n$. В этом случае произвольная формула Φ^Z , содержащая предикаты с числом переменных не более n , может быть преобразована к формуле исчисления I^1 по описанной выше схеме, а вместе с условием Γ_W^n приведена к виду (1.16). Однако само условие Γ_W^n при этом будет иметь чрезвычайно громоздкий вид так, что мы вынуждены опустить его вывод и даже не сможем хотя бы наметить построение в общих чертах.

Другим недостатком этого варианта является отсутствие универсального условия Γ_W^u , годного сразу для любых предикатов с любым числом переменных. В зависимости от конкретной формулы Φ^Z сначала определяем число n –

максимальное число переменных у предикатов, входящих в Φ^Z , а затем записываем условие Γ_W^n .

Другой способ приведения Φ^Z с n -местными предикатами к канонической форме (1.16) состоит в построении аналогов обратных функций Кантора $\mathcal{L}(x, y)$, $\mathcal{R}(x, y)$ для произвольного множества M , т.е. функций, осуществляющих взаимно однозначное отображение M в $M \times M$. Если такие функции удаётся построить, то произвольная формула Φ^Z может быть приведена к канонической форме (1.16) или (2.13) (на выбор) преобразованием множества $M \rightarrow M^+$ условием Γ_W или Γ_V по описанной выше схеме для счётного множества N . Если же такие функции построить не удаётся, то их можно задать на M^+ следующим образом.

Пусть имеется возможность разбиения M на 2 непересекающихся подмножества $M_1 \cup M_2 = M$, причём существует взаимно однозначное соответствие между M_1, M_2 и M , реализуемое в I^Z . Тогда нетрудно убедиться, что $M^+ = M_1^+ \times M_2^+$, и искомая функция может быть построена на M^+ .

В качестве примера рассмотрим $M = N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Множество одноместных предикатов является множеством всех подмножеств N и образует множество \mathcal{C} . В свою очередь, пары одноместных предикатов образуют множество $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Разбиение $N = N_1 \cup N_2$ состоит из чётных и нечётных чисел. Тогда взаимно однозначное соответствие между предикатами $A(x)$ и произвольными парами $A_1(x), A_2(x)$ таково: $A(0), A(2), A(4), \dots$ образуют таблицу истинности предиката $A_1(x)$, а значения $A(1), A(3), A(5), \dots$ - таблицу истинности предиката $A_2(x)$.

Предположим, что мы не знаем, как разбить некое произвольное множество M на множества M_1 и M_2 . В этом случае выделим из M счётное подмножество N и определим на нём дифференцирующий предикат $x' = y$. Такая процедура возможна для произвольного бесконечного M и осуществляется по той схеме, как было построено условие счётности Γ_N в гл. 2, с тем отличием, что сейчас не постулируется аксиома индукции. Это означает, что, помимо элементов $0, 1, 2, \dots$, могут существовать в определяемом множестве другие элементы, образующие множество $M - N$. Если затем мы доопределим предикат $x' = y$ как предикат равенства на $M - N$, то тем самым будет получено взаимно однозначное соответствие между множествами M и $M - \{0\}$. (множеством M из которого исключен единственный элемент $0, 0 \in N$).

Теперь мы можем построить множество M^+ всех подмножеств M и разбить его на 2 множества: M_1^+ , содержащее те подмножества M , в которые не входит элемент 0 , и M_2^+ , состоящее из подмножеств, содержащих 0 . Взаимно однозначное соответствие между M_1^+ и M_2^+ определяется совпадением входящих в них подмножеств за исключением одного элемента 0 . Соответствие между M_1^+ и M вытекает из соответствия между M и $M - \{0\}$. Это решает поставленную задачу отображения M на $M \times M$, а значит, и преобразования $\Phi^z \rightarrow \Phi^1$.

Имея возможность записать условие Γ_M^+ для множества M^+ , если известно условие Γ_M , мы можем построить условия, определяющие множества $N, N^+, N^{++}, N^{+++}, \dots$, где каждое последующее множество является множеством всех подмножеств предыдущего множества, начиная с множества натуральных чисел. Однако указанная последовательность не

исчерпывает всех возможностей построения бесконечных множеств в рамках формализма I^Z .

Пусть дано произвольное множество M . Запишем условие Γ_M^N , определяющее множество $M^{+N} = M \cup M^+ \cup M^{++} \dots$, являющееся объединением бесконечной последовательности множеств, в которой каждый последующий член является множеством всех подмножеств предыдущего множества. Формула Γ_M^N задаёт условно дифференцирующий предикат $V(t, x, y)$ для множества M^{+N} соотношениями:

$$\Psi_0 = \overline{V(t, x, y)} + V(t, x, x), \quad (3.1)$$

$$\Psi_a = \overline{V(t, x, x) \cdot V(t, y, x) \cdot A(x)} + A(y), \quad (3.2)$$

$$\Psi_e = \exists p \forall x \left(\overline{V(t, x, x)} + (A(x) = V(t, x, p)) \right), \quad (3.3)$$

$$\Psi_d = \exists q \left(V(t, q, q) \cdot (V(t, q, x) = \overline{V(t, q, y)}) \right) + \overline{V(t, u, x) \cdot A(x)} + A(y), \quad (3.4)$$

$$\Psi_+ = (\exists q V(t, q, x) = V(t', x, x)), \quad (3.5)$$

$$\Psi_z = \exists t V(t', x, x), \quad (3.6)$$

$$\Gamma_M^N = \forall A, t, x, y, u (\Psi_0 \cdot \Psi_a \cdot \Psi_e \cdot \Psi_d \cdot \Psi_+ \cdot \Psi_z). \quad (3.7)$$

Термин «условно дифференцирующий» означает, что для полного определения дифференцирующего предиката на M^{+N} требуется задать ещё условие, определяющее M . Смысл предиката $V(t, x, x)$ таков: $V(0, x, y)$ является предикатом $V(x, y)$ для исходного множества M , $V(0', x, y)$ - предикат $V(x, y)$, преобразующий множество M^+ в M^{++} , $V(0'', x, y)$ – предикат $V(x, y)$ для преобразования M^{++} в M^{+++} и т.д.

Условия (3.1) – (3.4), в основном, повторяют условия (2.8) – (2.11), определяющие $V(x, y)$. Разница состоит в следующем. Условие принадлежности x к \mathbf{M}^t (\mathbf{M} с t плюсами) таково: $V(t, x, x)$. Последующие элементы (для фиксированного t) существует только у $x \in \mathbf{M}^t$. Каждому одноместному предикату на \mathbf{M}^t поставлен в соответствии элемент так, что в совокупности эти элементы образуют множество \mathbf{M}^{t+} , причём предикатам, истинным только для одного элемента из \mathbf{M}^t поставлен в соответствие этот самый элемент. Однако общее число элементов \mathbf{M}^{+N} имеет большую мощность, чем \mathbf{M}^{t+} , поэтому в требование однозначности элемента p , $p \in \mathbf{M}^{t+}$, соответствующего предикату $A(x)$, $x \in \mathbf{M}^t$ необходимо внести уточнение. А именно, если предикат $A(x)$ не равен тождественно \bar{U} , то соответствующий ему элемент p единственен. Предикату же $A(x) = \bar{U}$ соответствуют все остальные элементы \mathbf{M}^{+N} . Последнее обстоятельство выражается в том, что (3.5) содержит дополнительное слагаемое $\overline{V(t, u, x)}$, которого нет в (2.11). Это условие можно прочесть так: если у x существует предшествующий элемент, то элемент x , соответствующий предикату $V(t, q, x)$ (здесь переменная q , $q \in \mathbf{M}^t$) единственен.

Условие (3.5) осуществляет переход от t к t' , при этом множество \mathbf{M}^{t+} , играющее роль результирующего множества для $V(t, x, y)$ в переходе $\mathbf{M}^t \rightarrow \mathbf{M}^{t+}$, начинает играть роль стартового множества для $V(t', x, y)$. Условие (3.6) означает, что \mathbf{M}^{+N} не содержит других элементов, кроме $\mathbf{M} \cup \mathbf{M}^+ \cup \mathbf{M}^{++} \cup \dots$

Задавая теперь конкретное \mathbf{M} некоторым условием Γ_M , можно построить определяющее условие множества \mathbf{M}^{+N} . В частности, полагая $\mathbf{M} = \mathbf{N}$, имеем $\mathbf{N}^{+N} = \mathbf{N} \cup \mathbf{N}^+ \cup \mathbf{N}^{++} \cup \dots$. Условие Γ_N , определяющее множество натуральных чисел, требует соответствующей модификации с учётом перехода от \mathbf{N}

к N^{+N} , как это осуществлялось в описанных выше случаях. А именно, предметные переменные в Γ_N должны принадлежать N (условие $V(0, x, x)$).

В свою очередь, для N^{+N} можно построить множество всех подмножеств N^{+N+} , а также N^{+N++} и т.д. Во всех этих случаях произвольная формула Φ^Z может быть приведена к каноническому виду (1.16) повышением мощности множества.

Таким образом, мы можем построить разнообразные множества высоких мощностей. Однако здесь возникает естественный вопрос о построении множеств промежуточных мощностей, в частности, множества промежуточной мощности между N и $N^+ = C$. Внешне задача выглядит как известная проблема, носящая название «континуум гипотезы» [6.8], однако в постановке этих задач имеются глубокие различия.

Классическое построение математики исходит из того, что первичным и фундаментальным является понятие множества. Множества определяются сразу все через некоторую систему аксиом: всё то, что удовлетворяет этой системе аксиом, является множеством, и любое множество удовлетворяет данной системе [6.8]. Далее мы можем на некотором множестве задать те или иные отношения (функции, предикаты) опять же с помощью некоторых дополнительных аксиом, а затем сформулировать и пытаться решить какие-то задачи, представляющие практический интерес.

В настоящей работе мы исходим из того, что математика – это формализм I^Z . Понятие множества возникает как сугубо вторичное в рамках метаанализа свойств формализма I^Z . А именно, среди замкнутых формул I^Z существуют такие, что из двух формул $\overline{\Gamma_M} + \Phi^Z$, $\overline{\Gamma_M} + \overline{\Phi^Z}$, Φ^Z – произвольная замкнутая

формула I^Z , истинна одна и только одна. Формулу Γ_M мы отождествляем с некоторым множеством M . При более детальном анализе выясняется, что $\Gamma_M(D)$ является условием, определяющим индивидный дифференцирующий предикат $D(x, y)$, который формально без условия $\Gamma_M(D)$ – просто произвольный переменный предикат исчисления I^Z . Предикат $D(x, y)$, для своей реализации требует некоторой однозначно определённой совокупности элементов, которые и образуют множество M . Таким образом, множество M порождается предикатом $D(x, y)$ и условием $\Gamma_M(D)$. Принципиальная разница с классическим подходом состоит в том, что система аксиом определяет множества все сразу, а в нашем случае каждое множество существует само по себе с индивидуальным и неповторимым набором свойств. Конечно, мы можем составить список условий Γ_M , т.е. список множеств M_1, M_2, \dots и попытаться выделить какие-то общие для всех множеств свойства. Однако возникает вопрос: «А зачем это нужно?».

Действительно, при решении каждой конкретной задачи математики рассматривается некоторое конкретное множество (и, быть может, несколько его подмножеств). При этом полный список свойств этого множества состоит из свойств, которыми обладают все множества сразу, и свойств, характерных только для данного конкретного множества. Причем для решения данной задачи нет никакой необходимости осуществлять такое разделение свойств этого множества.

В этом свете все проблемы аксиоматической теории множеств представляются либо надуманными, либо малозначительными. В самом деле, нам необходим полный список свойств конкретного множества M и нет никакой необходимости определять, как это множество соотносится со всеми остальными множествами. Поэтому более естественным представляется

подход, когда каждое множество образует полностью самостоятельную и независимую единицу с уникальным набором свойств.

Дадим ещё некоторые пояснения к сказанному. Числа π и e обладают всеми свойствами вещественных чисел и, сверх того, ещё некоторыми, характерными только для них самих. Однако если мы будем знать свойства нескольких вещественных чисел, то этого окажется совершенно недостаточно для решения задач анализа: нам необходимо изучить и знать общие свойства всех вещественных чисел сразу. Причина проста: если в формуле стоит вещественная переменная, связанная квантором всеобщности (а это обычное дело), то это означает необходимость проверить формулу на истинность для всех вещественных чисел сразу. С другой стороны, невозможно представить себе практически значимую задачу, которая для своего решения требует проверки на всевозможных множествах произвольно высоких мощностей одновременно и сразу.

Отметим ещё, что множества, определяемые условиями Γ_M , и множества аксиоматической теории множеств – это в своей основе разные понятия. В формализме I^Z множества определяются дифференцирующими предикатами и являются полностью конструктивистскими объектами. Дифференцирующий предикат делает все элементы множества различными и позволяет конкретно указать, чем отличается один элемент от другого. Например, число 7 множества N отличается от всех остальных тем, что у него есть единственное предшествующее число 6, которое, в свою очередь, имеет единственное предшествующее число 5 и т.д., а число 0 не имеет ни одного предшествующего. Если же мы имеем два подмножества N – два элемента C , то мы можем указать, что

одно подмножество, например, содержит число 7, а другое – нет, и это делает их различными.

В свою очередь, аксиоматическая теория множеств допускает «чистое» существование, например, в аксиоме выбора, что и обуславливает разницу в понимании термина «множество» у данных двух подходов.

При аксиоматическом подходе решением проблемы континуум – гипотезы является доказательство Коэна о не выводимости аксиомы выбора и обобщённой континуум гипотезы в теории ZF Цермело – Френкеля [6.8]. В нашем случае требуется конкретная формула $\Gamma_K(D)$ исчисления I^Z , определяющая некоторый дифференцирующий предикат $D(x, y)$, порождающий множество K промежуточной мощности, или отсутствие такового.

В связи с полученными выше результатами мы можем уточнить и конкретизировать ряд положений, высказанных во введении. Тот факт, что теория множеств, лежащая в основании математики, содержит ряд спорных и недостаточно обоснованных утверждений, неоднократно побуждал математиков к пересмотру всей конструкции построения математики. Альтернативным базовым понятием в этом случае является понятие процедуры. Исходно мы располагаем некоторым конечным количеством объектов. С помощью заранее оговорённых правил, не допускающих никакого двусмысленного толкования, мы можем построить ещё один объект, затем ещё один и т.д. При таком подходе бесконечность вообще не возникает, равно как и связанных с ней проблем. Вместе с тем манипулирование объектами по формальным правилам не является самоцелью. Каждый такой объект имеет содержательную интерпретацию и только в этом качестве

представляет значимый интерес для практических приложений. В целом данная концепция носит название конструктивного подхода. Осталось только уточнить само понятие процедуры: какие преобразования допустимы, а какие – нет.

Такое уточнение было сделано, и под допустимыми процедурами следует понимать рекурсивные, или алгоритмические процедуры (которые можно отождествить с процессом вычисления значений некоторой ОРФ). Однако последовательное проведение этой программы в жизнь привело к трудностям, которые лучше всего рассмотреть на примере рекурсивного математического анализа [7]. Из всех вещественных чисел приходится оставить только рекурсивные числа, т.е. счётное подмножество. Остальные числа просто не существуют. Соответственно все теоремы анализа либо отменяются, либо меняются до неузнаваемости. Что и не удивительно: ведь предел последовательности рекурсивных чисел не обязан быть рекурсивным числом. Замкнутость множества вещественных чисел является фундаментальным фактом, лежащим в основе всего анализа, и его отмена влечёт катастрофические последствия.

Предлагаемый подход состоит в расширительной трактовке понятия процедуры, а именно, наряду с финитными (закончившимися через конечное число шагов) мы допускаем бесконечные процедуры, имеющие предел. Применительно к анализу наша цель такова: 1. Сохранить континуум всех вещественных чисел полностью и без изъятий. 2. Сохранить кванторы, связывающие переменные на континууме, и не допустить их замены на ограниченные кванторы. 3. Сохранить все формулировки всех теорем «обычного» анализа в неизменном виде. Представляется почти очевидной невыполнимость заявленной программы в рамках

конструктивной концепции, хотя бы и при расширительной трактовке понятия процедуры. Действительно, связывание квантором всеобщности переменной на континууме означает необходимость проверки на истинность высказывания в континууме вариантов. Любая же процедура, взятая в сколь угодно общем варианте, является счётной. Можно думать, что расширение понятия процедуры приведёт просто к расширению множества рекурсивных чисел с сохранением счетности этого множества, т.е. по существу ничего не изменит в картине рекурсивного анализа.

Однако результаты гл.4 показывают, что с помощью нефинитной (счетной) процедуры можно установить истинность любого сколь угодно сложного высказывания на континууме. Иначе: конструктивный подход в рамках расширительной трактовки термина «процедура» полностью реализуем на континууме. Попробуем разобраться, в чем тут дело.

Пусть дана некоторая формула I^Z , содержащая только одноместные предикаты на континууме. Как было показано выше, это формула имеет равносильную ей содержательную интерпретацию на некотором конечном множестве, что позволяет определить ее истинность за конечное число шагов. В гл.4 показано, что произвольная формула на континууме имеет также счетную интерпретацию на некоторой модельной конструкции 2^n -деревьев. При этом процедура состоит в последовательном заполнении вершин дерева нулями некоторой ПРФ. Подобно тому, как формула, содержащая только одноместные предикаты, имеет альтернативную конечную модель, произвольная формула вида $\overline{\Gamma}_N + \Phi^Z$ имеет альтернативную счетную модель (что совсем не очевидно).

§4. Исчисления предикатов высших порядков

До сих пор мы рассматривали исчисления, в которых все предметные переменные заданы на одном и том же множестве M . Эта ситуация может быть обобщена следующим образом. Будем считать, что предикаты, заданные на множестве M сами образуют множество M^+ и являются предметными переменными некоторых других предикатов. В этом случае мы должны различать предикаты, заданные на M и на M^+ , поскольку это множества разных мощностей. Например, предикаты на M будем обозначать буквой A с индексом, а на M^+ - буквой B с индексом. При этом кванторы могут относиться только к предметным переменным на M и M^+ , но не к предикатам B_i . Исчисления такого типа носят название исчисления предикатов второго порядка.

Мы использовали множественное число для термина «исчисление», поскольку здесь возможны варианты. Прежде всего, следует уточнить, образовано ли множество M^+ только одноместными предикатами или же произвольными n -местными. В последнем случае нам придется дробить множество M^+ на множества M_1^+, M_2^+, \dots для одноместных, двухместных и т.д. предикатов. Соответственно придется дробить и предикаты типа B на предикаты с разными областями определения. Альтернативный вариант состоит в том, что M^+ учитывает только одноместные предикаты, а n -местные предикаты переписываются как одноместные с помощью функции Кантора на N или ее аналога на M .

Отдельный вопрос связан с допустимостью существования предикатов смешанного типа: часть переменных определена на M , а часть на M^+ . В этом случае также необходимо ввести

дополнительную дифференциацию предикатов типа B с соответствующими обозначениями.

Примером исчисления предикатов второго порядка может служить исчисление, у которого роль M играет множество натуральных чисел N , а роль M^+ – множество одноместных предикатов на N , образующее множество действительных чисел.

Возможно дальнейшее обобщение исчисления предикатов 2-го порядка до исчисления 3-го порядка, когда предикаты типа B сами становятся предметными переменными, образуя множество M^{++} . Аналогичным образом можно построить исчисления предикатов произвольного n -го порядка. В отличие от исчисления предикатов первого порядка I^1 , исчисления n -го порядка имеют множество вариантов и подвариантов.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Формула I^1 истина на произвольном бесконечном множестве тогда и только тогда, когда она истинна на N . Поэтому истинность формулы I^1 совпадает с истинностью формулы I^1 с условием счетности Γ_N , т.е. условие счетности Γ_N для исчисления I^1 реализуется как бы автоматически. Может создаться иллюзия, что в исчислении предикатов 2-го порядка исходное множество M также автоматически будет счетным, а M^+ – иметь мощность континуума. Однако, как мы видели выше, если допустить существование хотя бы одного квантора, связывающего одноместный предикат, то множества M , а вместе с ним и M^+ , могут иметь произвольно высокую мощность. Это означает, что при определении исчисления n -го порядка дополнительными аксиомами следует конкретизировать мощность M , в частности, $M = N$.

Следует учесть еще один возможный вариант построения исчисления n -го порядка, - когда роль элементов множеств $\mathbf{M}^+, \mathbf{M}^{++}, \dots$ играют произвольные функции (а не предикаты), построенные на $\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, \dots$. Мощность множества всевозможных функций, построенных на \mathbf{M} , совпадают с мощностью \mathbf{M}^+ множества всех подмножеств \mathbf{M} , однако такая конструкция требует своей специфической аксиоматики.

Ранее уже подчеркивалось главное неудобство рассмотрения многочисленных и многовариантных формализмов: метатеоремы, доказанные для одного формализма, не распространяются автоматически на остальные формализмы. Все это ведет к громоздкой и неудобной метатеории.

Покажем, что все перечисленные выше исчисления легко поглощаются формализмом \mathbf{I}^Z , т.е. любое высказывание исчисления предикатов n -го порядка может быть записано в \mathbf{I}^Z . Пусть на множестве \mathbf{M} задан один из вариантов исчисления $p + 1$ -го порядка ($p = 1, 2, 3, \dots$). Построим условие Γ_M^p , определяющее множество \mathbf{M}^p , содержащее дифференцирующий предикат T^p , условия, определяющего принадлежность той или иной переменной или предиката к множествам $\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, \mathbf{M}^{++}, \dots, \mathbf{M}^{p-1}$, а также аналоги функций Кантора для тех же множеств. После этого n -местные предикаты на $\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, \dots, \mathbf{M}^{p-1}$ преобразуются в n -местные и заменяются переменными в T^p . На все переменные, принадлежащие множествам $\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, \dots, \mathbf{M}^{p-1}$ накладываются соответствующие условия принадлежности.

Если же рассматривается множество всевозможных функций $y = f(x_1 \dots x_n)$, заданных на \mathbf{M} , то функциям сопоставляются переменные предикаты $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n, y)$ с условиями функциональной зависимости: существования и единственности

y для произвольных $x_1 \dots x_n$. После этого предикат $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n, y)$ свертывается в одноместный и превращается в элемент множества \mathbf{M}^+ .

Ситуацию, в которой в качестве предметной переменной предиката $P(x)$ выступает функция как элемент множества \mathbf{M}^+ всевозможных функций, не следует путать с подстановкой значения функции в качестве предметной переменной: $P(y)$, где $y = f(x)$, в предикат $P(x)$. В этом случае y принадлежит тому же множеству \mathbf{M} , что и x . Сама же запись $P(f(x))$ означает

$$\exists y(\mathcal{F}(x, y) \cdot P(y)).$$

§5. Быстрорастущие функции

В главе 3 был рассмотрен ряд алгоритмически неразрешимых теорий, и была выяснена общая причина их неразрешимости. Все дело в том, что среди ОРФ нет достаточно быстрорастущих функций. Каждая из этих теорий была бы разрешима, если множество ОРФ дополнить некоторой быстрорастущей функцией. Более того для этого достаточно было бы не все множество ОРФ, а лишь множество ПРФ.

В качестве примера рассмотрим снова теорию, состоящую из формул I_N^Z , содержащих только кванторы существования. Если такая формула истинна, то последовательной проверкой для всех наборов предметных переменных через конечное число шагов будет найден искомый набор. Если бы мы располагали некой мажорирующей функцией, которая, в зависимости от номера формулы, указывала, что число шагов проверки не должно превосходить некоторую величину, то теория была бы

разрешима. Неразрешимость же теории означает, что такая мажорирующая функция растет быстрее любой ОРФ.

Ввиду этого обстоятельства попытаемся определить, какими вообще принципиальными возможностями мы располагаем для построения все более и более быстрорастущих функций. Это позволит нам классифицировать и создать некую иерархию теорий, разрешимых как в финитном, так и нефинитном смысле, в зависимости от скорости роста соответствующей мажорирующей функции.

Пусть \mathcal{F} – множество всевозможных одноместных всюду определенных функций $y = f(x)$ натурального аргумента ($x = 0, 1, 2, \dots$), принимающих натуральные значения. Элементы \mathcal{F} будем обозначать символами f, g, h, \dots . Операторы, заданные на множестве \mathcal{F} , будем обозначать символами \hat{P}, \hat{Q}, \dots : $g = \hat{P}f$. Определим оператор $\hat{\Omega}$, ставящий в соответствие произвольному оператору \hat{P} некоторый оператор $\hat{Q} = \hat{\Omega}\hat{P}$ следующим образом. Пусть f – произвольная функция $f \in \mathcal{F}$. Обозначим $f_0 = \hat{P}f$, $f_1 = \hat{P}f_0$, $f_2 = \hat{P}f_1, \dots, f_n = \hat{P}^{n+1}f, \dots$. Тогда функция $g = \hat{Q}f$ такова: $g(x) = f_x(x)$, $x = 0, 1, 2, \dots$. Иными словами функция $g(x)$ состоит из значений, стоящих на диагонали таблицы, образованной функциями f_0, f_1, f_2, \dots . Поэтому оператор $\hat{\Omega}$ будем называть диагонализующими для оператора \hat{P} .

Далее будем рассматривать только монотонно возрастающие функции: $f(0) \geq 1$, $f(x+1) \geq f(x) + 1$, а операторы \hat{P}, \hat{Q}, \dots , удовлетворяющие условию $g = \hat{P}f$:

$$g(x) > f(x) \quad (5.1)$$

для всех x . Ясно, что последовательность $f_0 = \hat{P}f$, $f_1 = \hat{P}f_0, \dots$ дает все более и более быстрорастущие функции. Но при этом

оператор \hat{Q} , $\hat{Q} = \hat{\Omega}\hat{P}$ дает уже при однократном применении $\mathcal{G} = \hat{Q}f$ функцию $g(x)$, которая растет быстрее, чем любая из функций $f_n = \hat{Q}^{n+1}f$, т.е. $g(x) > f_n(x)$ для всех x , $x > n$.

Функция $f(x) = x'$ сложения с единицей удовлетворяет условиям монотонности $f(0) > 0$, $f(x') > f(x)$ и при этом имеет минимально допустимые значения. Простейшим из операторов, удовлетворяющих (5.1), является оператор \hat{S}_0 подстановки функции саму в себя:

$$\mathcal{G} = \hat{S}_0 f, \quad g(x) = f(f(x)). \quad (5.2)$$

Запишем в явном виде результат действия \hat{S}_0 на x' :

$$g_0 = \hat{S}_0 x', \quad g_1 = \hat{S}_0 g_1, \dots \quad g_n = \hat{S}_0^{n+1} x', \dots, \quad (5.3)$$

$$g_0(x) = x'', \quad g_1(x) = x''', \dots \quad g_n(x) = x + 2^{n+1}, \dots$$

Для оператора $\hat{S}_1 = \hat{\Omega}\hat{S}_0$ имеем:

$$\mathcal{G} = \hat{S}_1 x', \quad g(x) = x + 2^{x+1}. \quad (5.4)$$

Далее:

$$h_0 = \hat{S}_0 \mathcal{G} = \hat{S}_0 \hat{S}_1 x', \quad h_0(x) = x + 2^{n+1} + 2^{2^{x+1} + x + 1}. \quad (5.5)$$

Функции $h_1 = \hat{S}_0 h_0$, $h_2 = \hat{S}_0 h_1$, ... $h_n = \hat{S}_0^{n+1} \hat{S}_1 x' \dots$ мы не будем явно выписывать ввиду их громоздкости, укажем лишь, что $h_n(x)$ имеет порядок экспоненты от экспоненты, взятой 2^{n+1} раз. Соответственно функция $h(x)$:

$$h = \hat{S}_1^2 x', \quad (5.6)$$

имеет порядок экспоненты от экспоненты, взятой 2^{x+1} раз.

Если функцию $h(x)$ еще можно, с некоторым трудом, представить наглядно как быстрорастущую, то про функции $\hat{S}_1^3 x'$, $\hat{S}_1^4 x'$, ... можно лишь сказать, что это чрезвычайно быстрорастущие функции.

Пусть задано некоторое счетное подмножество \mathcal{F}_0 множества функций \mathcal{F} , и из \mathcal{F}_0 выделена бесконечная последовательность функций f_0, f_1, f_2, \dots , удовлетворяющих условиям монотонности и соотношениям $f_0(x) < f_1(x) < f_2(x) < \dots$ для всех x . При этом сами функции из \mathcal{F}_0 не обязательно удовлетворяют условиям монотонности. Последовательность f_0, f_1, f_2, \dots будем называть мажорирующей системой функции для множества \mathcal{F}_0 (далее m – системой), если для произвольной функции f , $f \in \mathcal{F}_0$ существует f_n такая, что $f(x) \leq f_n(x)$ для всех x .

Покажем, что последовательность

$$g = \hat{S}_1 x', \quad h = \hat{S}_1^2 x', \quad \hat{S}_1^3 x', \quad \hat{S}_1^4 x', \dots \quad (5.7)$$

образует m – систему для множества одноместных ПРФ. Прежде всего, убедимся, что все перечисленные в (5.7) функции являются ПРФ. Пусть $f(x)$ – произвольная ПРФ. Тогда и функция $g(x, y)$:

$$g(x, 0) = x, \quad g(x, y') = f(g(x, y)) \quad (5.8)$$

является ПРФ. Легко видеть, что

$$f_n = \hat{S}_0^{n+1} f, \quad f_n(x) = g(x, 2^{n+1}). \quad (5.9)$$

Отсюда следует:

$$\hat{S}_1 f = g(x, 2^{n+1}), \quad (5.10)$$

т.е. действия оператора \hat{S}_1 на ПРФ дает ПРФ, а значит, и $\hat{S}_1^n x'$ - ПРФ.

С другой стороны, произвольная ПРФ может быть получена последовательным действием операторов подстановки и рекурсии. При этом операция рекурсии дает более быстрорастущую функцию, чем операция подстановки. Поэтому ПРФ, полученная совместным действием n операторов подстановки и рекурсии будет мажорироваться функцией $\hat{S}_1^n x'$.

Повторным действием оператора $\hat{\Omega}$ на \hat{S}_1 получаем оператор $\hat{S}_2 = \hat{\Omega}\hat{S}_1$ для которого, в свою очередь, запишем последовательность функций:

$$f_{2,0} = \hat{S}_2 x', \quad f_{2,1} = \hat{S}_2^2 x', \quad \dots \quad f_{2,n} = \hat{S}_1^{n+1} x', \quad \dots \quad (5.11)$$

Функция $f_{2,0}(x)$ является диагональной для последовательности (5.7) и потому растет быстрее любого члена последовательности (5.7), а значит и произвольный ПРФ. Таким образом, $f_{2,0}$ уже не является ПРФ. Действием операторов \hat{S}_0 , \hat{S}_1 на $f_{2,0}$ можно получить новые примитивные рекурсивные относительно $f_{2,0}$ функции, поскольку эти операторы соответствуют операциям подстановки и примитивной рекурсии. Однако $f_{2,1}$ уже не будет примитивно рекурсивной функцией относительно $f_{2,0}$.

Множество примитивно рекурсивных функций относительно последовательности (5.11) назовем рекурсивными функциями 2-го порядка. Сама последовательность $f_{2,0}, f_{2,1}, f_{2,2}, \dots$, является, таким образом, m – системой для этого множества. Можно доказать, что имеющееся в литературе определение рекурсивных функций 2-го порядка равносильно приведенному выше. Мы не будем этого делать ввиду громоздкости выкладок.

Аналогично можно определить рекурсивные функции k -го порядка как множество ПРФ относительно m – системы

$$f_{k,0} = \hat{S}_k x', \quad f_{k,1} = \hat{S}_k^2 x', \dots, f_{k,n} = \hat{S}_k^{n+1} x', \dots \quad (5.12)$$

На этом наши возможности построения быстрорастающих функций не заканчиваются. Мы можем осуществить операцию диагонализации применительно к оператору $\hat{\Omega}$ и получить оператор $\hat{\Omega}_1$ такой, что, действуя на \hat{S}_0 , он дает оператор $\hat{S}_{1,1} = \hat{\Omega}_1 \hat{S}_0$ диагональный к последовательности операторов $\hat{S}_0, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots$

Действие оператора $\hat{S}_{1,1}$ на x' дает сверхрекурсивные функции 1-го порядка. Аналогично можно построить операторы $\hat{\Omega}_2, \hat{\Omega}_3, \dots$ с соответствующими сверхрекурсивными функциями и т.д.

Все перечисленные функции являются ОРФ. Для каждой из них можно записать рекурсивный предикат в I_N^Z , т.е. предикат, содержащий только кванторы всеобщности. Это возможно, поскольку операция подстановки функции в функцию и диагонализация возможна в I_N^Z , как мы это видели на примере универсальный ПРФ в гл.3.

Нам удалось построить достаточно быстрорастающие функции, используя две процедуры: подстановка функции в функцию и диагонализации. Однако в нашем распоряжении имеется еще более сильный инструмент построения быстрорастающих функций. В гл.3 была выведена универсальная ЧРФ $y = f_q(t, x)$ (4.10), где параметр t перечисляет одноместные ЧРФ, и сама функция $f_q(t, x)$ является двухместной ЧРФ. Эта функция не может мажорироваться никакой ОРФ, поскольку в противном случае она будет иметь рекурсивное доопределение. Здесь нужно иметь в виду, что функция $f_q(t, x)$ не удовлетворяет условиям монотонности, поскольку перечисляет все ЧРФ (и медленные

и быстрорастущие), а также не всюду определена. Поэтому быстрый рост $f_q(t, x)$ следует трактовать так. Пусть $f_{qm}(u) = \max_{t, x} |t, x \leq u| f_q(t, x)$. Тогда для произвольной ОРФ существует бесконечная подпоследовательность u_1, u_2, \dots , для которой $f_{qm}(u)$ превосходит данную ОРФ.

Принципиальная причина возможности столь быстрого роста заключается в следующем. Хотя среди ПРФ нет достаточно быстрорастущих функций (их рост ограничен m – системой (5.7)), зато есть достаточно медленно растущие. Большие значения универсальной ЧРФ появляются при μ -обращении некоторой ПРФ, т.е. при вычислении обратной функции, и медленный рост этой ПРФ предопределяет указанное значение ЧРФ.

Действием оператора \hat{Z} на f_q (доопределением f_q нолём) получаем $p_1(t_1, x) = \hat{Z} f_q(t, x)$ базовую функцию для АФ 1-го порядка (гл.3 §4). Она не удовлетворяет условиям монотонности, но легко может быть преобразована в таковую примитивно рекурсивной процедурой:

$$p_1^m(t', x') = \max(p_1^m(t, x'), p_1^m(t', x), p_1(t', x')), \quad (5.13)$$

$$p_1^m(0, x) = p_1(0, x), p_1^m(t, 0) = p_1(t, 0).$$

Функция $p_1^m(x, x)$ является монотонно возрастающей и для любой ОРФ $r(x)$ существует x_c такое, что $r(x) < p_1^m(x, x)$ для всех $x, x > x_c$. В качестве x_c может быть выбран номер t функции $r(x)$ в списке $f_q(t, x)$.

Применением описанных выше процедур диагонализации к функции $p_1^m(x)$ ($p_1^m(x) = p_1^m(x, x)$) возможно построение еще более быстрорастущих функций. Однако это равносильно записи

некоторой ОРФ относительно функции $p_1^m(x)$, как было показано выше. Мы же сейчас располагаем более сильным средством построения быстрорастущих функций – с помощью универсальной ЧРФ $q_1(t, x)$ относительно $p_1(t, x)$ (гл.3 §4). Такая функция заведомо будет содержать любую ОРФ относительно $p_1^m(x)$ и, значит, расти быстрее любой ОРФ относительно $p_1^m(x)$. Далее имеем $p_2(t, x) = \hat{Z}q_1(t, x)$ и бесконечную последовательность базовых функций $p_1, p_2, p_3 \dots$, для АФ. Соответствующие модифицированные функции $p_1^m(x), p_2^m(x), \dots$ образуют m – систему для АФ всех порядков, поскольку $p_k^m(x)$ является мажорирующей функцией для всех АФ $k - 1$ -го порядка.

m – система p_1^m, p_2^m, \dots достаточна для реализации разрешающей процедуры для арифметики Геделя (и вообще любой теории, образованной рекурсивными предикатами на N), но недостаточна для исчисления I_N^1 . Учитывая, что I_N^1 эквивалентно I_N^Z с формулами ОНФС 1-го порядка, то тем более недостаточна для всего исчисления I_N^Z с условием счетности. При этом мы вообще не касаемся исчислений I_M^Z с множеством M более высокой мощности, чем N .

Возможности построения быстрорастущих функций с помощью оператора $\hat{M}_Z = \hat{Z} \cdot \hat{M}$ (гл.3 §6) не исчерпываются m – системой p_1^m, p_2^m, \dots . Мы можем применить процедуру построения универсальной ЧРФ к всей совокупности АФ и построить мажорирующую функцию для всех АФ, растущую быстрее любой АФ (см. гл.3 §6). Данная процедура может повторяться неограниченное число раз с построением все более и более быстрорастущих функций.

Из материалов гл.3 §6 следует, что индивидуальные предикаты этих функций могут быть записаны в I_N^1 . Тот факт, что АФ и производные от них «сверхарифметические» функции, полученные последовательным применением оператора \widehat{M}_Z , выразимы в I_N^1 , означает неразрешимость исчисления I_N^1 в этих функциях, поскольку они недостаточно быстро растут. Требуется универсальная мажорирующая функция сразу для всех АФ и производных от них. Здесь имеется прямая аналогия с построением универсальной ЧРФ, которая является мажорирующей сразу для всех ОРФ, полученных операторами подстановки и диагонализации. Введением принципиально новой процедуры – операции \widehat{M}_Z задача была решена.

Искомая разрешающая процедура для I_N^1 была построена в гл.4. Она сводится к установлению факта существования траектории на 2^n -дереве с бесконечным числом нолей некоторой ПРФ. Разумеется, выполнить данную процедуру до конца и однозначно установить существование или отсутствие такой траектории невозможно. Можно лишь выполнить некоторое «разумное» конечное число шагов, после чего с той или иной степенью достоверности найти ответ на поставленную задачу. Весь вопрос в том, каково это «разумное» число, каков его порядок. Из изложенного выше следует, что для получения более или менее достоверного ответа может потребоваться просто колоссальное число, которое невозможно себе представить, тем более реализовать на практике.

Все это означает, что полученная в гл.4 нефинитная разрешающая процедура для математики континуума I_N^Z носит чисто теоретический характер и не может быть использована для решения конкретных задач. Однако с теоретической точки зрения этот результат имеет принципиальное значение, поскольку

устанавливает сам факт существования определенной истинности у произвольного утверждения математики континуума.

Литература

1. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», 1965 г.
2. Новиков П. С. Элементы математической логики, «Наука», 1973 г.
3. Клини С. Введение в метаматематику. ИЛ, 1957 г.
4. Гедель К. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, *Monatsh. Math u Phys.*, 38, 1931
5. Робинсон Р. (Robinson R) *Primitive recursive functions*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 53 (1947 г.)
6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику, «Наука», 1984 г.
7. Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ, «Наука», 1970 г.
8. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум гипотеза, М. «Мир», 1969 г.
9. Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории, *Успехи матем. наук* 20 №4 (1965 г.)